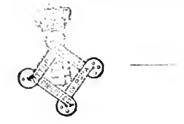

201
43 H
27



Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques.

Par

L. Painvin.



(Extrait du Journal des mathématiques pures et appliquées, Tome 65.)

Première Partie.

Quelques uns des résultats que nous allons signaler pourraient se déduire des notions connues sur les plans tangents en des points à distance finie, en appliquant à ces cas le principe de continuité; mais, indépendamment de l'importance d'une étude directe au point de vue logique, la méthode analytique que j'expose permet d'examiner dans tous ses détails et ses variétés la nature du contact des plans tangents à l'infini, et de discuter les nombreuses particularités des points multiples à l'infini. Or, dans une foule de circonstances, le mode de déduction que j'ai indiqué d'abord serait ou impuissant ou peu satisfaisant.

Ce mémoire est divisé en deux parties dont je ne publie dans ce moment que la première; elle comprend deux paragraphes respectivement consacrés: le premier, à l'étude des points simples à l'infini; le second, à l'étude des points doubles. La seconde partie sera consacrée à la recherche des propriétés fondamentales de la surface asymptote.

---

§. I.
Points simples à l'infini.

I. Recherche des points simples à l'infini.

1. En représentant par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, les coordonnées d'un point, on pourra écrire comme il suit l'équation d'une surface

$$(1.)\ (U)\qquad \varphi_m(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots+t^m\varphi_0 = 0,$$

φ_i étant une fonction homogène de degré i des variables x, y, z.

L'équation du *plan à l'infini* est

$$t = 0;$$

or, en faisant $t=0$ dans l'équation (1.), nous obtenons

$$(2.)\ (C)\qquad \varphi_m(x,y,z) = 0;$$

donc les points à l'infini sur la surface sont sur des droites parallèles aux génératrices du cône (C) ou (2.) que j'appellerai *cône des directions asymptotiques*.

Considérons une génératrice quelconque de ce cône

$$(3.)\ (G)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

le point à l'infini correspondant situé sur la surface sera

$$(4.)\ (I)\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma},\\ t=0.\end{cases}$$

Les équations d'une droite quelconque passant par le point I (droite nécessairement parallèle à la génératrice G) peuvent se mettre sous la forme

$$(5.)\ (G')\qquad \begin{cases}x=\alpha\varrho+\lambda t,\\ y=\beta\varrho+\mu t,\\ z=\gamma\varrho+\nu t,\end{cases}\quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

λ, μ, ν, étant des indéterminées. Ces équations représentent en effet une droite, car elles donnent

$$\frac{x-\lambda t}{\alpha}=\frac{y-\mu t}{\beta}=\frac{z-\nu t}{\gamma};$$

cette droite passe par le point I et par le point $\left(\frac{x}{t}=\lambda,\frac{y}{t}=\mu,\frac{z}{t}=\nu\right)$; elle est évidemment parallèle à la génératrice G; la quantité ϱ est proportionelle à la distance du point (λ,μ,ν) au point (x,y,z).

2. Cherchons la condition pour que la droite G' rencontre la surface en deux points coincidant en I c. à. d. pour que la droite G' touche la surface à l'infini.

Remplaçons x, y, z par leurs valeurs (5.) dans l'équation (1.); en développant et en adoptant la notation symbolique connue, on trouve

$$(6.)\ \left\{\begin{aligned}&\varrho^m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)\\ &+\varrho^{m-1}t\Big[\lambda\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]\\ &+\varrho^{m-2}t^2\Big[\frac{1}{1.2}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}^2\varphi_m+\frac{1}{1}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}\varphi_{m-1}+\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]\\ &+\varrho^{m-3}t^3\Big[\frac{1}{1.2.3}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}^3\varphi_m+\frac{1}{1.2}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}^2\varphi_{m-1}+\\ &\qquad+\frac{1}{1}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}\varphi_{m-2}+\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\varrho^{m-i}t^i\Big[\frac{1}{1.2\ldots i}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}^i\varphi_m+\frac{1}{1.2\ldots(i-1)}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}^{i-1}\varphi_{m-1}+\cdots\\ &\qquad+\frac{1}{1}\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big\}\varphi_{m-i+1}+\varphi_{m-i}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}=0.$$

Le premier terme $\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma)$ est nul si la droite G' est parallèle à la génératrice G; pour que la droite G' touche la surface, il faut que le premier membre de l'équation (6.) soit divisible par t^2, ce qui donne la condition

$$(7.)\qquad \lambda\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Il y a donc une infinité de droites G' parallèles à la génératrice G et touchant la surface à l'infini; le lieu de ces droites s'obtiendra en éliminant les indéterminées λ, μ, ν entre les équations (5.) et (7.).

En ayant égard à la relation

$$(8.)\qquad \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

on trouve, après cette élimination,

$$(9.)\ (P)\qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

avec la condition

$$(9^{\text{bis}}.)\qquad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

c'est l'équation d'un plan, lequel touche la surface au point I à l'infini; je lui donnerai le nom de ***plan asymptote***.

Il est facile de vérifier que l'équation du plan asymptote se déduit de celle du plan tangent en un point à distance finie.

Le plan asymptote est aussi le ***plan diamétral*** des cordes parallèles à la génératrice G; et ici, comme dans les surfaces du second ordre, ce ***plan diamétral singulier*** est parallèle à ses cordes; ceci résulte évidemment de la relation (8.).

3. **Remarque I.** Le plan asymptote est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant la génératrice G; car l'équation de ce dernier plan est

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = 0, \text{ avec la condition } \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Remarque II. Toutes les droites parallèles à la génératrice G et situées dans le plan P touchent la surface à l'infini. C'est la propriété ordinaire des plans tangents: toutes les droites situées dans un plan tangent et passant par le point de contact y rencontrent, en ce point, la surface en deux points coïncidents. Dans le cas actuel, le point de contact I est à l'infini, donc toutes les tangentes sont parallèles entre elles; elles sont, en outre, parallèles à la génératrice du cône qui détermine le point à l'infini considéré.

Remarque III. Dans un plan tangent ordinaire, le point de contact est un point double de la section de la surface par ce plan, et les tangentes en ce point double (dites *tangentes inflexionnelles*) rencontrent, en ce point, la surface en trois points coincidents.

Pour obtenir, dans le cas présent, les tangentes inflexionnelles, il faut exprimer que le premier membre de l'équation (6.) est divisible par t^3, ce qui conduit à la relation

$$(10.)\quad \begin{cases} \lambda^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\mu^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\nu^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2\lambda\mu\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2\lambda\nu\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\mu\nu\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \quad +2\Big(\lambda\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\Big)+2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0. \end{cases}$$

Si, à l'aide des relations (5.), nous éliminons les indéterminées λ, μ, ν, on aura l'équation de la surface sur laquelle se trouvent les tangentes inflexionnelles. En ayant égard aux relations (7.) et (8.) et aux identités qui caractérisent une fonction homogène $f(\alpha,\beta,\gamma)$ du degré n, savoir:

$$(11.)\quad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial f}{\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial f}{\partial\gamma}=nf(\alpha,\beta,\gamma), \\ \alpha^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\beta^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+\gamma^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+2\alpha\gamma\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\beta\gamma\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \quad =n(n-1)f(\alpha,\beta,\gamma), \end{cases}$$

on trouve pour l'équation de la surface cherchée

$$(12.)\ (S)\quad \begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \quad +2t\Big(x\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\Big)+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0. \end{cases}$$

On vérifie aisément, que la surface S est la polaire du second ordre du point à l'infini $\left(\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ ou la surface diamétrale du second ordre correspondant aux cordes parallèles à la droite G.

L'intersection de cette surface par le plan asymptote P donne les droites qui rencontrent la surface en I, à l'infini, en trois points coincidents c. a. d. les *tangentes inflexionnelles* correspondant à un point de contact à l'infini.

Nous allons constater que le plan P coupe en effet la surface S suivant deux droites parallèles.

Le cône asymptote de la surface S est parallèle au cône

$$x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}=0;$$

on voit d'abord que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est sur ce cône, et que le point à l'infini I est sur la surface S; ceci résulte immédiatement des relations (8.) et (11.). Maintenant le plan tangent en I à la surface S a pour équation

$$\left.\begin{array}{l} x\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)+y\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}\right) \\ +z\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}\right)+t\left(\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)\end{array}\right\} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

c'est celle du plan P. Ainsi le plan asymptote P touche la snrface S au point I à l'infini; il est donc tangent au cône asymptote do S, et, par suite, coupe cette surface suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact avec le cône asymptote, c. à. d. à la droite G. D'où:

La courbe d'intersection de la surface proposée U par un plan asymptote P a un point double à l'infini; les deux tangentes en ce point double sont les intersections de la surface S par le plan P; ces deux droites sont dites tangentes inflexionnelles.

Cette dernièro dénomination est justifiée par la seconde des propriétés suivantes:

Un plan quelconque passant par le point I à l'infini c. à. d. parallèle à la droite G coupe la surface U suivant une courbe passant par le point I et ayant pour asymptote en I l'intersection du plan asymptote par le plan sécant.

Un plan quelconque passant par une des tangentes inflexionnelles coupe la surface suivant une courbe ayant un point d'inflexion en I à l'infini; la tangente d'inflexion est la tangente inflexionnelle considérée.

Je n'insisterai pas sur la première propriété; quant à la seconde, elle peut se démontrer ainsi:

Prenons la tangente inflexionnello pour axe des z, c. à. d. exprimons que l'axe des z appartient au plan asymptote P et à la surface S, on trouve alors que les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, doivent être de la forme

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \cdots + z^{m-1}(Ax+By), \\ \varphi_{m-1} &= \cdots + z^{m-2}(A_1x+B_1y), \\ \varphi_{m-2} &= \cdots + z^{m-3}(A_2x+B_2y), \end{aligned}$$

en ordonnant ces fonctions par rapport aux puissances croissantes de z. Or l'intersection de la surface U par le plan xz ou $y=0$ (qu'on peut regarder comme un plan quelconque passant par la tangente inflexionnelle) a pour équation

$$(ax^m+\cdots+Axz^{m-1})+t(a_1x^{m-1}+\cdots+A_1xz^{m-2})+t^2(a_2x^{m-2}+\cdots+A_2xz^{m-3})+\cdots=0;$$

la droite $x=0$, c. à. d. l'axe des z, est évidemment une tangente d'inflexion au point I à l'infini, car ce point est, dans le cas général, un point simple. (Voir, pour l'étude des points à l'infini dans les courbes algébriques, les N^{elles} Annales de M. M. *Gerono* et *Rouhet*, année 1864.)

Remarque IV. Lorsque le cône des directions asymptotiques est imaginaire, il n'y a pas de points réels à l'infini sur la surface U.

Si la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est une génératrice réelle de ce cône, le plan asymptote correspondant sera réel, mais les tangentes inflexionnelles peuvent ne pas être réelles. Ces tangentes seront réelles, si la surface S est un hyperboloïde à une nappe, ou un cône réel, ou un paraboloïde hyperbolique, ou un cylindre hyperbolique; elles seront imaginaires, si la surface S est un ellipsoïde réel ou imaginaire, ou un paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique. Dans le premier cas, le plan asymptote P coupe la surface U suivant une courbe ayant un point double non isolé à l'infini, c. à. d. ayant des branches infinies réelles; dans le second cas, le point double à l'infini est isolé.

Remarque V. *La surface formée par les tangentes inflexionnelles qui correspondent aux points à l'infini est, en général, de l'ordre* $m(3m-4)$.

Le lieu des tangentes inflexionnelles s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre les équations (12.) et (9.), c. à. d.

$$(13.)\quad\begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\cdots+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; 0,\\ x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; 0,\\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; 0.\end{cases}$$

Or, lorsqu'entre trois équations homogènes par rapport à trois variables et des degrés respectifs m_1, n_1, p_1, on élimine ces variables, le résultat de l'élimination est du degré n_1p_1 par rapport aux coefficients de la première de ces équations; du degré m_1p_1, par rapport à ceux de la seconde; et du degré m_1n_1, par rapport à ceux de la troisième. Dans le cas actuel, on a

$$m_1=m-2,\quad n_1=m-1,\quad p_1=m;$$

en outre, les coefficients de la première équation sont du second degré par rapport aux variables x, y, z; ceux de la seconde sont du premier degré; et ceux de la troisième, du degré zéro. Donc le résultat de l'élimination sera, en x, y, z, du degré

$$2n_1p_1+1.m_1p_1+0.m_1n_1 = 2m(m-1)+m(m-2),$$

c. à. d. du degré

$$m(3m-4).$$

L'équation de cette surface ne dépend que des coefficients des fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}; donc la surface, lieu des tangentes inflexionnelles pour les points à l'infini, sera la même pour toutes les surfaces

$$\varphi_m(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+t^3F_{m-3}(x,y,z,t) = 0.$$

$F_{m-3}(x,y,z,t)$ étant une fonction arbitraire homogène du degré $(m-3)$.

Remarque VI. Dans le cas des surfaces du second ordre, le cône C est parallèle au cône asymptote, et la surface S n'est autre que la surface elle même. Les tangentes inflexionnelles sont alors les deux génératrices parallèles suivant lesquelles le plan asymptote ou plan tangent au cône asymptote coupe la surface; la courbe de section, qui est du second degré et a un point double à l'infini doit se réduire à deux droites parallèles. La formule précédente n'est plus applicable ici, car la première des équations (13.) est indépendante des variables α, β, γ.

Dans le cas des surfaces du troisième ordre, le lieu des tangentes inflexionnelles est de l'ordre 3.5 ou 15, en général; cette dernière surface reste la même pour toutes les surfaces

$$\varphi_3(x,y,z)+t\varphi_2(x,y,z)+t^2\varphi_1(x,y,z)+kt^3 = 0.$$

où k est une constante arbitraire.

II. Discussion des points simples à l'infini.

4. Supposons que la surface S se réduise à un cône, c. à. d. qu'on ait l'équation de condition

$$(14.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} & 2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \end{vmatrix} = 0;$$

alors les deux tangentes inflexionnelles se confondent; la courbe d'intersection de la surface U par le plan P a un point de rebroussement à l'infini et la tangente de rebroussement est la génératrice de contact du plan P avec le cône S.

Dans ce cas, les indéterminées α, β, γ, vérifient les deux équations homogènes

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0, \quad \Delta = 0;$$

la première est du degré m; la seconde du degré $4(m-2)$; par suite, le nombre des solutions communes est égal à $4m(m-2)$; donc

Sur une surface d'ordre m, il y a, en général, $4m(m-2)$ points à l'infini pour lesquels le plan tangent coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement, laquelle est parallèle à la direction asymptotique, n'est pas à l'infini.

5. Il peut arriver que la surface S soit un paraboloïde; ceci a lieu lorsque

$$(15.)\quad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les plans directeurs du paraboloïde sont donnés par l'équation

$$x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} + y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} + z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} + 2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta} + 2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} + 2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} = 0.$$

La génératrice G est parallèle à l'un des plans directeurs; et le plan P, qui est en même temps un plan asymptote du paraboloïde (remarq. III), doit être parallèle au même plan directeur; il coupe donc le paraboloïde suivant deux droites dont l'une est à l'infini; et une seule de ces droites est à l'infini, car les deux ne pourraient être à l'infini que si le plan P était lui-même à

l'infini. Or ceci ne peut avoir lieu que si la direction asymtotique G est parallèle à l'axe du paraboloïde: et, comme nous le verrons plus loin, cette dernière hypothèse exige, outre la relation (15.), d'autres conditions.

Dans le cas présent, les indéterminées α, β, γ, vérifient les deux équations homogènes

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad H = 0;$$

la première est du degré m; la seconde, du degré $3(m-2)$; par suite, le nombre des solutions communes est égal à $3m(m-2)$; donc

Sur une surface d'ordre m il y a $3m(m-2)$ points à l'infini pour lesquels une des tangentes inflexionnelles et une seule est à l'infini, parallèlement à la direction asymptotique; c. à. d. que le plan asymptote correspondant à un de ces points coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini dont une des tangentes est à l'infini; ce qui revient à dire que, des deux branches infinies correspondant à ce point double, l'une est hyperbolique et l'autre parabolique.

Il est bon de remarquer que les *directions asymptotiques* correspondant à ces points sont les $3m(m-2)$ *arêtes d'inflexion* du cône C: car, nous le verrons plus loin, l'équation de condition (15.) est précisément celle qui détermine les arêtes d'inflexion du cône C.

Observation. Jusqu'à présent nous sommes restés dans le cas d'une équation générale de degré m, c. à. d. que nous n'avons supposé aucune relation entre les coefficients de cette équation. Nous allons maintenant examiner différents cas particuliers qui peuvent se présenter et qui entraînent l'existence de une ou plusieurs relations entre les coefficients de l'équation de la surface U.

6. Supposons que les quantités α, β, γ satisfassent aux relations (14.) et (15.), c. à. d.

$$H = 0, \quad \triangle = 0,$$

lesquelles jointes à la relation

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

donnent trois équations homogènes entre ces indéterminées; ceci n'aura donc pas lieu en général. Admettons néanmoins que ces trois équations aient une ou plusieurs solutions communes, et voyons la particularité que présentera alors la surface U.

Pour cette solution commune, la surface S devient un cylindre du

second degré elliptique ou hyperbolique; la droite $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est une direction asymptotique du cylindre, et le plan P est un des *deux plans asymptotes* de ce cylindre (on sait que dans un cylindre elliptique ou hyperbolique tous les plans tangents à l'infini se confondent avec l'un ou l'autre des deux plans asymptotes proprement dits); la génératrice de contact se compose de deux droites coïncidentes et à l'infini; donc

Dans ce cas particulier, le plan asymptote P coupe la surface U suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est elle-même à l'infini parallèlement à la direction asymptotique considérée (α, β, γ).

Si la surface S était un cylindre elliptique, le plan asymptote serait imaginaire, ce qui ne peut avoir lieu (équation (9.)) que si la solution (α,β,γ) est elle-même imaginaire; donc, si la solution (α,β,γ) est réelle, la surface S sera un cylindre hyperbolique.

Il est important de remarquer que la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre S; car, dans un cylindre du second degré, les plans des centres se coupent suivant une même droite parallèle aux génératrices; or les plans des centres ont ici pour équations

$$(16.)\quad\begin{cases} x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}=0,\\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}=0,\\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=0.\end{cases}$$

Pour que la droite (α,β,γ) soit une génératrice, il faudrait qu'elle fût parallèle à chacun de ces trois plans, ce qui entraînerait les trois conditions

$$(17.)\quad\begin{cases} \alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\quad\text{ou}\quad(m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\\ \alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma}\quad\text{ou}\quad(m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\\ \alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}\quad\text{ou}\quad(m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\end{cases}$$

or, pour l'instant, nous n'admettons pas ces relations.

Remarquons qu'on exprimera que la surface S est un cylindre en écrivant que les trois plans (16.) se coupent suivant une même droite; l'équation de condition sera donc indépendante des coefficients de la fonction φ_{m-2}; ceci

résulte d'ailleurs de l'équation (14.), car, d'après la relation (15.), le coefficient de $2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)$ est nul. Ainsi, lorsque la particularité que nous venons d'étudier se présente dans une surface d'ordre m, elle a lieu pour toutes les surfaces du même ordre dont les équations ont les mêmes termes du $m^{\text{ème}}$ et du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, quels que soient les termes de degré inférieur au $(m-1)^{\text{ème}}$.

7. Il peut arriver que la surface S se compose de deux plans qui se coupent, c. à. d. que le cylindre du cas précédent se réduise à ses deux plans asymptotes; le plan P, qui est en même temps un plan asymptote de la surface S, se confondra alors avec un de ces plans. La droite d'intersection des deux plans n'est pas parallèle à la direction asymptotique; car, dans le cas contraire, on en conclurait comme dans le n°. 6. que les dérivées $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}$ sont nulles, ce que nous n'admettons pas pour le moment.

Dans l'hypothèse actuelle, les tangentes inflexionnelles sont indéterminées; c'est qu'en effet

Toutes les droites parallèles à la génératrice $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ *et situées dans le plan asymptote P rencontrent la surface en trois points coincidents. Le plan asymptote P coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I à l'infini; et tout plan passant par ce point à l'infini, c. à. d. parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point à l'infini est un point d'inflexion, la tangente d'inflexion est l'intersection du plan P avec le plan sécant.*

Les tangentes au point triple, c. à. d. les tangentes situées dans le plan P et rencontrant la surface en quatre points coincidant en I, seront les intersections du plan asymptote P avec la polaire du troisième ordre du point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\, t=0\right)$.

Afin d'établir la proposition qu'on vient d'énoncer, nous prendrons pour axe des z la direction asymptotique considérée, pour plan des xz le plan P; et nous exprimerons que la surface S se réduit à deux plans dont un est le plan des xz (l'intersection des deux plans ne doit pas être parallèle à l'axe des z). En introduisant ces hypothèses, les fonctions

$$\begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = \cdots\cdots (ax^2+2bxy+cy^2)z^{m-2}+(Ax+By)z^{m-1}+Cz^m, \\ \varphi_{m-1}(x,y,z) = \cdots\cdots (a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2}+C_1z^{m-1}, \\ \varphi_{m-2}(x,y,z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +(A_2x+B_2y)z^{m-3}+C_2z^{m-2}, \end{cases}$$

prennent la forme

$$(1^a.)\quad \begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = \cdots\cdots + (2bxy+cy^2)z^{m-2} + Byz^{m-1}, \\ \varphi_{m-1}(x,y,z) = \cdots\cdots + (a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2}, \\ \varphi_{m-2}(x,y,z) = \cdots\cdots\cdots\cdots + (A_2x+B_2y)z^{m-3}; \end{cases}$$

le plan asymptote P et la surface S ont alors respectivement pour équations

$$(P)\qquad y = 0,$$

$$(S)\qquad y(2bx+cy+(m-1)Bz+B_1t) = 0.$$

La section de la surface par le plan asymptote $y=0$ est

$$(a_0x^m+\cdots+a_{m-3}x^3z^{m-3})+t(b_0x^{m-1}+\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(c_0x^{m-2}+\cdots+A_2xz^{m-3})+\cdots=0:$$

la direction asymptotique $x=0$ correspond à un point triple de la section; car si l'on pose $x=kt$, on voit que le premier membre est divisible par t^3, quel que soit k.

L'intersection de la surface par une droite quelconque située dans le plan asymptote et parallèle à la direction asymptotique c. à. d. à l'axe des z s'obtiendra en faisant, dans l'équation de la surface,

$$y=0,\quad x=kt;$$

on voit, d'après ce qui vient d'être dit, que cette droite rencontre le surface en trois points coincidents; ce qui d'ailleurs résulte nécessairement de la présence du point triple.

Nous pouvons regarder le plan des yz comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; or la section de la surface par ce plan $x=0$ a pour équation

$$(a_0'y^m+\cdots+cy^2z^{m-2}+Byz^{m-1})+t(b_0'y^{m-1}+\cdots+B_1yz^{m-2})+t^2(c_0'y^{m-2}+\cdots+B_2yz^{m-3})+\cdots=0:$$

la direction asymptotique $y=0$, c. à. d. l'axe des z, correspond à un point simple à l'infini; posant $y=kt$, on trouve pour asymptote $y=0$, et on constate que le premier membre de l'équation est divisible par t^3; le point à l'infini est donc un point d'inflexion dont la tangente est l'axe des z.

Toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé précédent se trouvent ainsi démontrées.

8. **Observation.** Avant de pousser plus loin cette discussion, il est utile de rappeler les relations qui expriment que le cône C des directions asymptotiques a des arêtes doubles, de rebroussement, etc. ....

La théorie des courbes nous fournit immédiatement ces relations; il suffit de remarquer que si un cône possède une arête double, par exemple,

la section du cône par un plan quelconque aura un point double au point où le plan rencontre l'arête double. Or, si nous considérons la section de la surface conique par un plan parallèle au plan des xy, nous pouvons regarder $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, comme les coordonnées d'un point quelconque de la section; une remarque analogue est applicable aux sections parallèles aux autres plans coordonnés.

D'après cela, nous pouvons écrire de suite les conditions pour que l'arête (α, β, γ) du cône des directions asymptotiques

$$\varphi_m(x, y, z) = 0$$

soit une arête double; ces conditions sont

$$(18.) \qquad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = 0;$$

l'équation des plans tangents au cône suivant cette arête double sera

$$(19.) \qquad x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} + y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} + z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} + 2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} + 2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} = 0.$$

L'arête (α, β, γ) sera une arête de rebroussement si ces deux plans se confondent, c. à. d. si les plans des centres

$$(20.) \qquad \begin{cases} x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} + y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} + z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha} + y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} + z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha} + y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta} + z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} = 0. \end{cases}$$

se confondent; or ceci revient à écrire que les déterminants partiels du déterminant

$$(21.) \qquad H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Les mêmes considérations nous permettent aussi de conclure que les arêtes d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z) = 0$ sont données par les solutions communes aux deux équations

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad H = 0.$$

Toutes ces remarques n'offrant aucune difficulté, nous n'insisterons pas d'avantage. Revenons maintenant à la discussion.

9. Admettons que la direction asymptotique (α, β, γ) soit déterminée par une solution commune aux trois équations (18.)

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \gamma} = 0,$$

ce qui ne pourra avoir lieu que sous certaines conditions; nous supposerons. en outre, que les relations (18.) ont lieu sans qu'on ait en même temps

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

car, si cela était, nous aurions (équation (6.)) un point double à l'infini sur la surface; c'est une étude que nous n'aborderons que plus loin.

On voit, par ce qui précède, que les hypothèses admises reviennent à dire que la génératrice (α, β, γ) est une arête double du cône C. L'équation (9.) montre que le plan asymptote P est à l'infini; ainsi:

La surface U touche le plan de l'infini en autant de points qu'il y a de génératrices doubles distinctes dans le cône des directions asymptotiques, pourvu que ces génératrices n'appartiennent pas au cône

$$\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0.$$

Mais le contact du plan à l'infini présente des différences suivant que la génératrice qui correspond au point simple que nous considérons est une arête double ordinaire ou une arête de rebroussement.

1°. Si l'arête (α, β, γ) est une arête double ordinaire, c. à. d. si les plans (19.) sont distincts, *la surface S est un paraboloïde dont l'axe est parallèle à la génératrice* $G\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\right)$. En effet, les plans du centre de la surface S ont pour équations

$$(22.)\quad \begin{cases} x\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha^2} + y\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \beta} + z\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \gamma} + t\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \alpha} = 0, \\ x\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \alpha} + y\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \gamma} + t\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta} = 0, \\ x\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \alpha} + y\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \beta} + z\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma^2} + t\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \gamma} = 0; \end{cases}$$

or, il résulte d'abord des relations (18.) que ces trois plans sont parallèles à

la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$; et, de plus, il ne sont pas parallèles entre eux, car autrement les plans (19.) coincideraient, ce qui est contraire à notre hypothèse. J'ajoute que ces trois plans ne se coupent pas suivant une droite unique; car, en ajoutant les équations (22.) respectivement multipliées par α, β, γ, on trouve

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

d'où $t=0$, puisque $\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ est différent de zéro; donc tous les points communs aux trois plans des centres sont dans le plan de l'infini; et, comme ces plans ne sont pas parallèles, il s'ensuit qu'ils se coupent suivant des droites parallèles. Les tangentes inflexionnelles sont les deux droites à l'infini, intersections du plan P avec le paraboloïde; ou, ce qui revient au même, avec les deux plans directeurs de ce paraboloïde; or les deux plans directeurs du paraboloïde sont évidemment les deux plans (19.) c. à. d. les deux plans tangents au cône C suivant son arête double; donc

Dans ce premier cas, la surface U est touchée par le plan de l'infini; le point de contact est, pour la section par le plan à l'infini, un point double dont les deux tangentes (toutes deux à l'infini) sont les intersections du plan à l'infini avec les deux plans distincts tangents au cône C suivant l'arête double considérée ou avec deux plans parallèles.

2°. Si l'arête (α,β,γ) est une arête de rebroussement du cône C, les plans (19.) se confondent, et, par suite, les plans des centres (22.) sont parallèles; ces derniers plans ne se confondent pas, car tous les points communs sont, comme on vient de le voir, dans le plan à l'infini; *la surface (S) est alors un cylindre parabolique.* L'équation de ce cylindre parabolique ou de la surface S peut s'écrire:

$$\frac{1}{\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}}\left(x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2+2t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)$$
$$+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

On voit d'abord que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est parallèle au plan diamétral

$$x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} = 0,$$

puis qu'on a l'égalité

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} = (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = 0;$$

mais la droite G n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre; car si cela était, elle serait parallèle au plan tangent représenté par les termes du premier degré en x, y, z de l'équation du cylindre, c. à. d. qu'on aurait

$$\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=(m-1)\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

ce qui est contraire à l'une de nos hypothèses.

Le plan asymptote P est aussi asymptote au cylindre parabolique et correspond à la direction asymptotique (α,β,γ); ce plan est à l'infini et coupe le cylindre suivant deux droites confondues à l'infini, puisque le plan à l'infini touche le cylindre tout le long de la droite à l'infini intersection du plan à l'infini avec le plan des directions asymptotiques du cylindre. Ainsi:

Dans ce second cas, la surface U est encore touchée par le plan à l'infini; le point de contact est, pour la section par le plan à l'infini, un point de rebroussement; la tangente de rebroussement (à l'infini) est l'intersection du plan à l'infini par le plan tangent au cône C suivant l'arête de rebroussement ou par un plan parallèle.

3°. Il peut arriver que *la surface S se compose de deux plans dont l'un est à l'infini.* On voit facilement, dans ce cas, que l'arête (α,β,γ) du cône C est une arête triple de ce cône; le plan asymptote P est encore à l'infini; toutes les droites à l'infini parallèles à la génératrice G ont avec la surface un contact du second ordre. Le plan P à l'infini coupe la surface suivant une courbe à l'infini ayant un point triple sur la direction asymptotique considérée; les trois tangentes en ce point triple sont les intersections du plan de l'infini avec la polaire du troisième ordre du point $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ ou avec les trois plans tangents au cône suivant son arête triple.

Cette variété de contact est un cas particulier de celui qui a été examiné au n° (7.).

Remarque. Il est utile de remarquer que lorsqu'on exprime que la surface S est un cylindre parabolique, les relations écrites entrainent nécessairement les relations (18.), c'est-à-dire

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0.$$

En effet, nous exprimerons que la surface S est un cylindre parabolique en écrivant que les plans des centres (22.) sont parallèles.

Or on a les identités

$$\begin{cases} (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}, \\ (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}, \\ (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}. \end{cases}$$

Si l'on prend ces équations deux par deux et qu'on élimine successivement le terme en α, on trouve en vertu des hypothèses admises

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}};$$

en multipliant respectivement par α, β, γ, les termes de chacun de ces rapports et en ajoutant, on a pour la valeur commune

$$\frac{\alpha\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}}{\alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}} \quad \text{ou} \quad \frac{m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)}{(m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}};$$

d'où l'on conclut

$$(m-1)\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}\right)^2 = m\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma);$$

$$\text{or} \quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0.$$

En éliminant α, ou β, ou γ, entre les deux premières des relations ci-dessus on sera conduit à

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0; \text{ et, par suite, } \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0.$$

La proposition énoncée se trouve donc démontrée.

10. Nous allons examiner maintenant le cas d'une droite à l'infini sur la surface U.

Nous nous bornerons à l'étude des cas suivants:

I°. $(Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots\cdots=0;$

II°. $(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots\cdots=0;$

III°. $(Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0;$

IV°. $(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0;$

ce sont les cas les plus généraux dans l'hypothèse qui nous occupe.

1er cas. Le cône $\varphi_m(x, y, z)$ se décompose en un plan et en un cône de degré $(m-1)$, de sorte que

$$\varphi_m(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z) = Q\varphi(x,y,z);$$

la droite à l'infini

$$(D) \quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

est toute entière sur la surface U.

Soit une génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$ située dans le plan Q; le plan asymptote P' correspondant à cette direction asymptotique aura pour équation

$$(23.) \qquad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

on a donc alors une infinité de plans asymptotes parallèles au plan Q et dont la position varie avec l'orientation de la direction asymptotique dans le plan Q.

Une des nappes de la surface présente, à l'infini, la forme de celle d'un paraboloïde hyperbolique dont la plan Q serait un des plans directeurs. Les plans asymptotes P' passent par la droite D et touchent la surface au point où la droite D est rencontrée par la direction asymptotique considérée.

Parmi les plans asymptotes P', $(m-1)^1$ d'entre eux coincident avec le plan Q; ils correspondent aux $(m-1)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$.

Parmi les plans P', $(m-1)$ d'entre eux sont transportés à l'infini parallèlement à eux-mêmes; ils correspondent aux $(m-1)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône $\varphi(x,y,z) = 0$; ces droites sont des arêtes doubles du cône $\varphi_m(x, y, z) = 0$.

Enfin, parmi les plans P', il y en a toujours $(m-1)$ coincidant avec un plan donné parallèle au plan Q, par exemple

$$Ax+By+Cz+Kt = 0;$$

car il suffit qu'on ait

$$K\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma), \qquad A\alpha+B\beta+C\gamma = 0.$$

Chacun de ces $(m-1)$ plans touche la surface en un point différent à l'infini sur la droite D; ces points de contact sont sur les génératrices, intersections du plan Q avec le cône du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré

$$K\varphi(x, y, z) - \varphi_{m-1}(x, y, z) = 0.$$

Dans le cas actuel, la surface S a pour équation

$$(24.)\quad \begin{cases} (Ax+By+Cz)\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) \\ +t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0; \end{cases}$$

la surface représentée par cette équation est un *paraboloïde*. Un des plans directeurs est le plan Q; les plans asymptotes P' sont tous parallèles à ce plan directeur, et, par suite, coupent la surface S suivant une droite à distance finie et une droite à l'infini qui est la droite D. Donc

Tous les plans asymptotes P' coupent la surface U suivant une courbe ayant un point double à l'infini, une des tangentes en ce point double est à distance finie et l'autre est la droite D à l'infini.

2ème cas. Le cône $\varphi_m(x,y,z)$ se décompose en deux plans confondus et en un cône du degré $(m-2)$, de sorte que

$$\varphi_m(x,y,z)=(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)=Q^2\varphi(x,y,z).$$

Si nous considérons une droite $G(\alpha,\beta,\gamma)$ située dans le plan Q, le plan asymptote correspondant à cette direction asymptotique a pour équation

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \text{ou}\quad t=0;$$

donc tous les plans asymptotes P' correspondant aux directions asymptotiques parallèles au plan Q sont transportés à l'infini parallèlement à ce dernier plan; c. à. d. que la surface U est touchée par le plan à l'infini tout le long de la droite à l'infini

$$(D)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0 \end{cases}$$

située sur cette surface.

Une des nappes de la surface U présente à l'infini la forme d'un cylindre parabolique. Le plan Q coupe le cône $\varphi_{m-1}(x,y,z)=0$ suivant $(m-1)$ droites déterminant sur la surface $(m-1)$ points doubles.

La surface S qui sert à déterminer les tangentes inflexionnelles devient dans ce cas

$$(25.)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]^2+t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

c'est *un cylindre parabolique*.

La génératrice G est parallèle au plan diamétral Q, mais elle n'est pas parallèle au cylindre.

Ainsi le plan à l'infini touche la surface tout le long de la droite D; chaque point de cette droite peut être regardé comme un point de rebrousse-

ment de la section de la surface plan à l'infini, la tangente de rebroussement est la droite D. Cette remarque nous montre l'accord qui existe entre le cas que nous venons d'étudier et celui qui a été examiné au [n°. 9, 2°].

3ème cas. Les deux fonctions φ_m et φ_{m-1} sont respectivement de la forme

$$\varphi_m(x, y, z) = (Ax + By + Cz)\varphi(x, y, z) = Q\varphi(x, y, z),$$
$$\varphi_{m-1}(x, y, z) = (Ax + By + Cz)\psi(x, y, z) = Q\psi(x, y, z).$$

Si nous considérons une droite quelconque $G(\alpha, \beta, \gamma)$ située dans le plan Q, le plan asymptote correspondant à cette direction asymptotique a pour équation

$$(Q) \qquad Ax + By + Cz = 0;$$

donc le plan asymptote reste invariable quelle que soit la direction asymptotique considérée dans le plan Q; en d'autres termes,

Le plan Q touche la surface tout le long de la droite à l'infini

$$(D) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Une droite quelconque située dans ce plan rencontre la surface en deux points coincidents, et une droite quelconque parallèle à ce plan rencontre la surface en un seul point à l'infini.

Tout plan parallèle au plan Q coupe la surface U suivant la droite à l'infini D et suivant une courbe du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre.

La surface (S) se réduit ici à

$$(Ax + By + Cz)\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} + t\psi(\alpha, \beta, \gamma)\right] + t^2\varphi_{m-2}(\alpha, \beta, \gamma) = 0:$$

c'est ***un cylindre hyperbolique*** dont le plan Q est un des plans asymptotes; ce cylindre serait elliptique si le plan Q était imaginaire.

L'analogie de ce cas avec celui qui a été étudié au [n°. 6] est visible.

La surface S se réduira à deux plans qui se coupent pour les $(m-2)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône

$$\varphi_{m-2}(x, y, z) = 0;$$

et nous rentrons alors dans le cas étudié au [n°. 7].

4ème cas. Les fonctions φ_m et φ_{m-1} ont les formes suivantes

$$\varphi_m(x, y, z) = (Ax + By + Cz)^2\varphi(x, y, z) = Q^2\varphi(x, y, z),$$
$$\varphi_{m-1}(x, y, z) = (Ax + By + Cz)\ \psi(x, y, z) = Q\ \psi(x, y, z);$$

4 *

la droite à l'infini

$$(D) \qquad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0 \end{cases}$$

est alors une ***droite double*** de la surface U; car un plan quelconque passant par la droite D rencontre la surface suivant deux droites coïncidant avec cette même droite D; nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

11. **Remarque.** Dans la discussion qui précède, nous avons pu remarquer que la surface S a présenté presque toutes les variétés des surfaces du second ordre; cependant nous n'avons pas rencontré de plans parallèles, ni de plans coïncidents; et, dans le cas des cylindres, la direction asymptotique ne s'est jamais trouvée parallèle au cylindre. Examinons donc si ces cas particuliers peuvent se présenter dans l'hypothèse d'un ***point simple***.

Les équations des plans des centres de la surface S sont

$$(26.) \qquad \begin{cases} x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0; \end{cases}$$

et l'on a toujours la condition

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

1°. Si la surface S est un cylindre elliptique ou hyperbolique, les plans des centres se coupent suivant une même droite parallèle aux génératrices du cylindre; donc la droite G ne pourrait être parallèle aux génératrices du cylindre qu'à la condition d'être parallèle à chacun de ces plans, ce qui entrainerait les relations

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = 0.$$

Si maintenant on ajoute les équations (26.) respectivement multipliées par α, β, γ, il vient

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

cette équation devant représenter un plan passant par la droite d'intersection (supposée à distance finie) des plans (26.), il faut que

$$\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

On voit alors, par l'équation (6.), que le point à l'infini correspondant à cette direction asymptotique est ***un point double de la surface U***.

2°. Si la surface S est un cylindre parabolique, on a encore [n°. 9, Remarque] les relations

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;$$

et nous avons vu [n°. 9, 2°] que la génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$ ne peut être parallèle aux génératrices du cylindre que si l'on a

$$\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

nous arrivons encore à la conclusion précédente.

3°. Pour que la surface S se réduise à deux plans parallèles, il faut que les plans (26.) se confondent; ils doivent alors se confondre avec le plan

$$(P)\qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\,\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

dont l'équation se déduit des équations (26.) respectivement multipliées par α, β, γ et ajoutées.

Nous abandonnerons ici l'emploi des formules générales pour adopter une méthode plus particulière et qui présentera en même temps plus de netteté; ainsi nous exprimerons que la surface S se réduit à deux plans parallèles en prenant pour axe des z la direction asymptotique considérée.

Soit donc

$$\begin{aligned}
\varphi_m(x,y,z) &= \cdots\cdots+(ax^2+2bxy+cy^2)z^{m-2}+(Ax+By)z^{m-1}+Cz^m;\\
\varphi_{m-1}(x,y,z) &= \cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2}+C_1z^{m-1};\\
\varphi_{m-2}(x,y,z) &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(A_2x+B_2y)z^{m-3}+C_2z^{m-2};
\end{aligned}$$

on a, par hypothèse $\alpha=0$, $\beta=0$, γ différent de zéro, par exemple $\gamma=1$; et par suite $C=0$, puisque $\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0$.

L'équation de la surface S est alors

$$(S)\; ax^2+2bxy+cy^2+(m-1)Axz+(m-1)Byz+t[A_1x+B_1y+(m-1)\,C_1z]+t^2C_2=0.$$

La surface S devant se réduire à deux plans parallèles, nous pouvons prendre l'un d'eux ou comme plan des xz, ou comme plan des xy; car, il est visible d'après l'équation générale de la surface S, que le cas de *deux plans à l'infini* ne peut se présenter que si le point à l'infini est un point double de la surface U.

Première hypothèse. La surface S se réduit à deux plans parallèles dont un est le plan des xz, ce qui suppose que la direction asymptotique

est parallèle à l'un des plans à distance finie; on devra avoir

$a=0,\ b=0;\ A=0,\ B=0;\ A_1=0,\ C_1=0;\ C_2=0,$ on a d'ailleurs $C=0$:

la surface S a alors pour équation

$$(S) \qquad cy^2+B_1ty = 0;$$

et l'équation de la snrface U devient

$$(\cdots+cy^2z^{m-2})+t(\cdots+B_1yz^{m-2})+t^2[\cdots+(A_2x+B_2y)z^{m-3}]+\cdots = 0.$$

On voit qu'une droite quelconque parallèle à l'axe des z

$$x=ht, \qquad y=kt,$$

rencontre la surface à l'infini en deux points coincidents, puisque le premier membre de l'équation est divisible par t^2; cela a encore lieu lorsque B_1 ou c sont nuls; le point à l'infini est donc un point double de la surface. Ainsi

Dans le cas d'un point simple, la surface S ne peut pas se réduire à deux plans parallèles, ni à deux plans coincidents, ni à deux plans dont un est à l'infini lorsque la direction asymptotique est supposée parallèle au plan à distance finie.

Deuxième hypothèse. La surface S se réduit à deux plans parallèles dont un est le plan des xy; on doit avoir alors

$a=0,\ b=0,\ c=0;\ A=0,\ B=0;\ A_1=0,\ B_1=0;$ on a d'ailleurs $C=0$;

dans ce cas, la surface S a pour équation

$$(S) \qquad t[(m-1)C_1z+C_2t] = 0:$$

et l'équation de la surface U devient

$$[\cdots+(a_2x^3\cdots+d_2y^3)z^{m-3}]+t[\cdots+C_1z^{m-1}]+t^2[\cdots+C_2z^{m-2}]+\cdots = 0.$$

Une droite quelconque parallèle à l'axe des z ne rencontre la surface à l'infini qu'en un seul point; ce point à l'infini est donc an point simple de la surface. Ainsi

Dans le cas d'un point simple, la surface S peut se réduire à deux plans dont un à l'infini, mais la direction asymptotique n'est pas parallèle au plan à distance finie.

C'est le cas singulier qui a été étudié au [n°. 9, 3°].

12. **Résumé** *de l'étude d'un point simple à l'infini.*

Si I est un point à l'infini sur la surface U et correspondant à la direction asymptotique G, ce point est un *point simple* lorsqu'une droite *quelconque* passant par le point I, c. à. d. parallèle à la droite G, ne rencontre la surface qu'en un seul point.

Le plan tangent à la surface en I ou plan asymptote P est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant la génératrice G; ce plan coupe la surface U suivant une courbe ayant un point double à l'infini en I, les tangentes en ce point double (ou *tangentes inflexionnelles* de la surface) sont les intersections de la surface S par le plan P; la surface S est la polaire du second ordre du point I à l'infini ou la surface diamétrale du second ordre correspondant à la direction G [n°. 3, remarque I, III].

La nature du contact du plan asymptote P est indiquée d'une manière très-nette par la forme de la surface S, comme on le voit par le résumé suivant:

I°. *La surface S est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes:*

Le point double de la section par le plan P est un point isolé.

II°. *La surface S est un hyperboloïde à une nappe:*

Le point double à l'infini de la section est un point double ordinaire dont les deux tangentes sont à distance finie.

III°. *La surface S est un cône:*

Le point double à l'infini de la section par le plan P est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à distance finie [n°. 4].

IV°. *La surface S est un paraboloïde:*

1°. Si la direction asymptotique G n'est pas parallèle à l'axe de la surface S, le plan asymptote est à distance finie et coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini dont une des tangentes, et une seule, est à l'infini [n°s. 5 et 10, 1er cas].

2°. Si la direction asymptotique G est parallèle à l'axe de la surface S, le plan asymptote est à l'infini; l'arête G est une arête double du cône des directions asymptotiques; les deux tangentes au point double sont à l'infini dans les deux plans tangents au cône suivant l'arête double [n°. 9, 1°].

Lorsque le paraboloïde est elliptique, le point double est isolé.

V°. *La surface S est un cylindre elliptique ou hyperbolique:*

1°. Si la génératrice G n'est pas parallèle au cylindre, le point double de la section par le plan asymptote est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à l'infini; le plan asymptote est à distance finie [n°. 6].

Lorsque le cylindre est elliptique le point de rebroussement est isolé.

Il peut arriver que le plan asymptote touche la surface tout le long d'une droite à l'infini [n°. 10, 3ème cas].

2°. Si la génératrice G est parallèle au cylindre, le point I à l'infini est *un point double de la surface* [n°. 11, 1°].

VI°. *La surface S se compose de deux plans qui se coupent:*

Le plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini; tout plan parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe dont le point à l'infini est un point d'inflexion; une droite quelconque, située dans le plan asymptote et parallèle à la direction asymptotique, rencontre la surface en trois points coincidents [n°. 7].

Si la génératrice G était parallèle à l'intersection des deux plans, le point I à l'infini serait un point double de la surface.

VII°. *La surface S est un cylindre parabolique:*

1°. La génératrice G n'est pas parallèle au cylindre; dans ce cas, la droite G est une arête de rebroussement du cône des directions asymptotiques; le plan asymptote est à l'infini et coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement au point de contact; la tangente de rebroussement est à l'infini et se trouve dans le plan touchant le cône suivant son arête de rebroussement [n°. 9, 2°].

Il peut arriver que le plan asymptote (à l'infini) touche la surface tout le long d'une droite à l'infini [n°. 10, 2ème cas].

2°. Si la génératrice G est parallèle au cylindre, le point à l'infini est un point double de la surface [n°. 11, 2°].

VIII°. *La surface S se compose de deux plans dont un à l'infini:*

1°. La direction asymptotique n'est pas parallèle au plan à distance finie; le point à l'infini est un point simple; le plan asymptote est à l'infini, et le point de contact est un point triple de la section par ce plan; la génératrice G est alors une arête triple du cône des directions asymptotiques [n°. 9. 3°].

2°. Si la direction asymptotique est parallèle au plan à distance finie, le point à l'infini est un point double de la surface [no. 11, 3°].

IX°. Dans le cas d'un point simple, la surface S ne peut pas se réduire à deux plans parallèles, ni à deux plans coincidents, ni à des plans tous deux à l'infini [n°. 11, 3°].

---

§. II.

Points doubles à l'infini.

I. Recherche des points doubles à l'infini.

13. Supposons que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ soit une génératrice double du cône des directions asymptotiques $\varphi_m(x,y,z)=0$ et appartienne en même temps au cône $\varphi_{m-1}(x,y,z)=0$, c. à. d. qu'on ait

$$(27.)\qquad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

les trois premières de ces relations entraineot évidemmeot la suivante

$$(27^{\text{bis}}.)\qquad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Le premier membre de l'équation (6.) est alors divisible par t^2, quels que soient λ, μ, ν, c. à. d. que toute droite passant par le point à l'infini

$$I\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, \\ t=0 \end{cases}$$

y rencontre la surface en deox points coincidents; le point I à l'infini est donc ***un point double de la surface***.

Pour obtenir les tangentes proprement dites à la surface en ce point, il fuut exprimer que le premier membre de l'équation (6.) est divisible par t^3; ces droites formeroot oue surface touchant la surface U au point I à l'infini.

Pour qoe le premier membre de l'équatioo (6.) soit divisible par t^3, on doit avoir entre λ, μ, ν, la relation

$$(28.)\quad \left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_m+2\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-1}+2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Nous obtiendrons la surface formée par les tangentes en I en éliminant λ, μ, ν, à l'aide des relations (5.); l'équation précédente devient alors

$$\begin{aligned}&\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_m\\ &+2t\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-1}+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0.\end{aligned}$$

Il résulte de l'ideotité déjà citée, savoir

$$(29.)\quad \begin{cases}\alpha^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2\alpha\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\beta\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}\\ \qquad = m(m-1)\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)\end{cases}$$

et de la relatiou $(27^{\text{bis}}.)$ que le coefficient de ϱ^2 est nul.

Le coefficient de ϱ est aussi nul; car, en ordonnant par rapport à x, y, z, t, on trouve que ces variables ont pour multiplicateurs respectifs:

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma},$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma).$$

On voit donc, en ayant égard aux relations (27.), que la surface, lieu des tangentes à la surface au point I à l'infini, a pour équation

$$(30.)\ (I')\quad \left\{\begin{aligned} & x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}\\ & +2t\left[x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right]+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}\right\}=0;$$

c'est un cylindre que je nommerai *cylindre asymptote de la surface au point double I.*

14. Nous allons d'abord constater que l'équation (30.) représente effectivement un cylindre. En effet, les plans du centre ont pour équations

$$(31.)\quad \left\{\begin{aligned} & x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}=0,\\ & x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}=0,\\ & x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=0;\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par α, β, γ, on arrive, en égard aux relations (27.), à une identité; ces plans passent donc par une même droite; par suite, la surface I' est un cylindre.

Les plans asymptotes de ce cylindre sont parallèles aux plans

$$(32.)\quad x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}=0;$$

ces plans sont précisément les plans tangents au cône des directions asymptotiques suivant l'arête double $G(\alpha,\beta,\gamma)$, [n°. 8].

Le cylindre asymptote I' est la polaire du second ordre du point a l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ ou la surface diamétrale du second ordre cor-

respondant à la direction $G(\alpha, \beta, \gamma)$. Les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite G, car cette droite est parallèle à chacun des plans des centres (31.).

Ainsi, *en un point double I à l'infini d'une surface, les tangentes proprement dites forment un cylindre du second degré parallèle à la direction asymptotique sur laquelle se trouve le point I; cette droite est une arête double du cône des directions asymptotiques.*

15. Nous signalerons les propriétés caractéristiques suivantes:

1°. *Un plan quelconque passant par le point double c. à. d. parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; les tangentes en ce point double sont les intersections du cylindre asymptote par le plan sécant.*

2°. *Un plan tangent quelconque au cylindre asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact de ce plan avec le cylindre.*

3°. *Les plans asymptotes du cylindre coupent la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact, laquelle est aussi à l'infini.*

Pour démontrer les propriétés qu'on vient d'énoncer, nous prendrons pour axe des z une parallèle à la direction asymptotique considérée, c. à d. que nous supposerons

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1;$$

et pour plan des xz, un des plans tangents au cylindre; nous choisirons, en outre, la génératrice de contact pour axe des z. Si l'on tient compte des relations (27.) et qu'on ait égard à la position particulière des axes par rapport à la surface I', on trouve que les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, doivent être de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_m(x, y, z) &= \cdots\cdots + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)z^{m-2};\\ \varphi_{m-1}(x, y, z) &= \cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2};\\ \varphi_{m-2}(x, y, z) &= \cdots\cdots\cdots\cdots + (A_1x + B_1y)z^{m-3};\end{aligned}$$

et le cylindre I' a pour équation

$$(I') \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + B_1yt = 0.$$

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique considérée; or l'équation de la section de la surface par ce plan $x = 0$ est

$$(\cdots + Cy^2z^{m-2}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + B_1yz^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car si l'on pose

$$y = kt$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^2, quel que soit k. Nous obtiendrons les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, on a ainsi

$$Ck^2+B_1k=0, \quad \text{ou} \quad Cy^2+B_1yt=0;$$

ce sont précisément les deux droites intersections du cylindre I' par le plan $x=0$; la proposition (1°.) se trouve ainsi démontrée.

Le plan des xz ou $y=0$ est tangent au cylindre asymptote; or l'équation de la section de la surface par ce plan est

$$(\cdots+Ax^2z^{m-2})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+A_2xz^{m-3})+\cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car si l'on pose

$$x = kt$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^2, quel que soit k. Nous obtiendrons les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, on a ainsi

$$k^2=0, \quad \text{ou} \quad x^2=0;$$

le point à l'infini est donc un point de rebroussement; ce qui démontre la proposition (2°.).

On établira de la même manière la proposition (3°.) en prenant pour axe des z la ligne des centres du cylindre asymptote, et, pour plan des xz, un des plans asymptotes de ce cylindre.

16. Parmi les tangentes qui forment le *cylindre asymptote*, il y en a qui ont avec la surface un contact d'ordre plus élevé que le premier, c. à. d. qui rencontrent la surface en *quatre* points coincidant avec le point I.

Nous obtiendrons ces tangentes en égalant à zéro les coefficients de t^2 et t^3 dans l'équation (6.); on trouve d'abord la relation (28.) qui, par l'élimination de λ, μ, ν, nous conduit à l'équation (30.) du cylindre asymptote.

En égalant à zéro le coefficient de t^3, on a (en conservant la notation symbolique)

$$(33.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m+3\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1} \\ \quad +6\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right\} = 0.$$

Si, entre cette équation et les relations (5.) nous éliminons λ, μ, ν, nous

aurons l'équation d'une seconde surface sur laquelle doivent se trouver les tangentes en question que je désignerai encore sous le nom de *tangentes inflexionnelles*.

Par la substitution indiquée l'équation (33.) devient

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m \\ \qquad +3t\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1} \\ +6t^2\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6t^3\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right\}=0.$$

Maintenant développons suivant les puissances de ϱ l'équation (34.); rappelons les hypothèses (27.)

$$(27.)\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\ \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \text{et}\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

équations dont la dernière est un conséquence des trois premières, et remarquons que pour des fonctions homogènes du degré n on a les identités

$$(35.)\quad \left\{\begin{array}{ll} (1^o.) & \alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial f}{\partial\gamma} = nf(\alpha,\beta,\gamma); \\ (2^o.) & \left\{\begin{array}{l}\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+2\alpha\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\beta\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad = n(n-1)f(\alpha,\beta,\gamma);\end{array}\right. \\ (3^o.) & \left\{\begin{array}{l}\alpha^3\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3}+\beta^3\frac{\partial^3 f}{\partial\beta^3}+\gamma^3\frac{\partial^3 f}{\partial\gamma^3}+3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\partial\beta}+3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta^2} \\ +3\alpha^2\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\partial\gamma}+3\alpha\gamma^2\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\gamma^2}+3\beta^2\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\beta^2\partial\gamma}+3\beta\gamma^2\frac{\partial^3 f}{\partial\beta\partial\gamma^2}+6\alpha\beta\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad = n(n-1)(n-2)f(\alpha,\beta,\gamma).\end{array}\right. \end{array}\right.$$

En vertu de la troisième des relations (35.) le coefficient de ϱ^3 est nul.

D'après la seconde des relations (35.), le coefficient de ϱ^2 se réduit à

$$3(m-1)(m-2)\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\gamma)\right],$$

quantité nulle par suite des hypothèses (27.).

Enfin, en ayant égard à la première des identités (35.), le coefficient de ϱ est, abstraction faite du facteur $-3(m-1)$,

$$\left[\begin{array}{l} x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad +2t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right];$$

or cette expression est celle à laquelle nous conduit la relation (28.) lorsqu'on y remplace λ, μ, ν, par leurs valeurs (5.); cette quantité est donc nulle aussi, puisque nous devons tenir compte de cette relation.

Par conséquent, les *tangentes inflexionnelles* doivent se trouver sur la surface

$$(36.)\ (\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{l}\left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m+3t\left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1}\\ +6t^2\left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6t^3\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma)\end{array}\right\}=0.$$

Cette surface est du *troisième ordre;* il est facile de se convaincre que c'est la polaire du 3ème ordre du point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$, ou la surface diamétrale du troisième ordre correspondant aux cordes parallèles à la génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$.

Cette surface Σ et le cylindre asymptote Γ se coupent suivant six droites parallèles à la génératrice G; *il y a donc six tangentes inflexionnelles* c. à. d. *six tangentes au point double I ayant avec la surface un contact du second ordre.*

Nous allons constater que le cylindre asymptote et la surface Σ se coupent en effet suivant six droites parallèles à la génératrice G.

17. Prenons pour axe des z la direction asymptotique considérée, c. à. d. supposons

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,$$

et écrivons que les relations

$$(27.)\qquad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

sont satisfaites.

On constatera, sans difficulté, que les fonctions φ_m, φ_{m-1} doivent avoir les formes suivantes

$$(37.)\ \left\{\begin{array}{l}\varphi_m(x,y,z)=\cdots+(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+(Ax^2+2Bxy+Cy^2)z^{m-2};\\ \varphi_{m-1}(x,y,z)=\cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2};\\ \varphi_{m-2}(x,y,z)=\cdots\cdots\cdots+(a_2x+b_2y)z^{m-3}+A_2z^{m-2};\\ \varphi_{m-3}(x,y,z)=\cdots\cdots\cdots+(a_3x+b_3y)z^{m-4}+A_3z^{m-3};\end{array}\right.$$

nous avons écrit en même temps les fonctions φ_{m-2}, φ_{m-3}, qui seront nécessaires pour former les équations du cylindre asymptote et de la surface Σ.

En prenant pour axe des z la direction asymptotique, on trouve que les équations de ces deux surfaces sont respectivement:

Cylindre asymptote

$$(38.)\ (\Gamma)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0:$$

surface Σ

$$(39.)\ (\Sigma)\quad 0 = \left\{\begin{array}{l} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+(m-2)(Ax^2+2Bxy+Cy^2)z \\ +t[a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+(m-2)(A_1x+B_1y)z]+t^2[a_2x+b_2y+(m-2)A_2z]+A_3t^3. \end{array}\right.$$

Ces formules nous seront extrêmement utiles pour la discussion des points doubles.

18. Revenons maintenant à l'objet que nous avions en vue, savoir l'intersection des deux surfaces Γ et Σ.

Le cylindre asymptote Γ a pour équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0;$$

l'équation de la surface Σ peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 \\ \qquad +(m-2)z[Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2] \end{array}\right\} = 0;$$

or la seconde parenthèse est nulle si l'on a égard à la première équation: donc les points communs à la surface Σ et au cylindre asymptote sont communs aux deux surfaces

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0,$$
$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 = 0.$$

Mais ces deux surfaces sont deux cylindres parallèles à l'axe des z; donc

Le cylindre asymptote de la surface U coupe la surface Σ suivant six droites parallèles à la direction asymptotique; ces six droites ont avec la surface, au point double à l'infini, un contact proprement dit du second ordre c. à. d. rencontrent la surface en quatre points coincidents.

Les équations (38.) et (39.) nous montrent immédiatement que le point à l'infini considéré est aussi un point double pour la surface Σ, et que le cylindre asymptote à la surface U est aussi asymptote à la surface Σ.

Remarque. Lorsque la surface U est du troisième ordre, la surface Σ n'est autre que la surface elle-même; nous pouvons donc conclure de ce qui précède que si une surface du troisième ordre a un point double à l'infini, le cylindre asymptote correspondant à ce point double coupe la surface suivant six droites parallèles à la direction asymptotique.

19. Avant de nous occuper de la discussion des points doubles, il nous reste à étudier la section de la surface par un plan quelconque passant par une des tangentes inflexionnelles.

Prenons pour axe des z la tangente inflexionnelle considérée, et pour plan des xz le plan tangent au cylindre asymptote suivant cette arête; nous nous servirons donc des équations (38.) et (39.), et nous écrirons que l'axe des z appartient aux deux surfaces Γ et Σ et que le plan des xz est tangent au cylindre. Nous obtenons ainsi les conditions

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_1 = 0.$$

Cherchons l'intersection de la surface par le plan des xz qui est tangent au cylindre asymptote suivant une tangente inflexionnelle, et par le plan des yz qu'on peut regarder comme un plan quelconque passant par cette tangente, en ayant égard à la forme (37.) des fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, φ_{m-3} et aux dernières relations.

La section de la surface par le plan des yz ou $x = 0$ est

$$(\cdots + Cy^2z^{m-2}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + b_2yz^{m-3}) + t^3(\cdots + b_3yz^{m-4}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double, car en posant

$$y = kt$$

le premier membre de l'équation est divisible par t^2: on aura les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, ce qui donne

$$Ck^2 + B_1k = 0, \quad \text{ou} \quad Cy^2 + B_1yt = 0;$$

lorsqu'on fait $y = 0$ le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^4, donc l'axe des z est, pour le point double, une tangente d'inflexion.

La section de la surface par le plan xz ou $y = 0$ est

$$(\cdots + Ax^2z^{m-2}) + t(\cdots + a_1xz^{m-3}) + t^2(\cdots + a_2xz^{m-3}) + t^3(\cdots + a_3xz^{m-4}) + \cdots = 0:$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car, en posant $x = kt$, on trouve que le premier membre de l'équation est divisible par t^2; on aura les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, ce qui donne

$$Ak^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 = 0;$$

et, lorsqu'on fait $x = 0$, le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^4; on a donc un point de rebroussement de deuxième espèce, car la tangente de rebroussement a un contact du second ordre.

20. Résumons les propriétés principales des points doubles à l'infini.

Résumé.

En un point double I à l'infini sur une surface, les tangentes proprement dites forment un cylindre du second degré parallèle à la direction asymptotique G sur laquelle se trouve le point I; la droite G est une arête double du cône des directions asymptotiques, c'est une condition nécessaire à l'existence d'un point double, mais non suffisante.

Un plan quelconque passant par le point double c. à. d. parallèle à la droite G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, les tangentes en ce point double sont les intersections du cylindre asymptote par le plan sécant.

Un plan tangent quelconque au cylindre asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement en I à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact et a avec la courbe un contact du premier ordre; c'est un rebroussement de première espèce.

Les plans asymptotes du cylindre (lesquels sont parallèles aux deux plans tangents au cône des directions asymptotiques suivant l'arête double G) coupent la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement est la génératrice de contact, laquelle est aussi à l'infini.

Parmi les génératrices du cylindre asymptote, il y en a *six*, que je nommerai *tangentes inflexionnelles*, qui rencontrent la surface en I en quatre points coincidents. La polaire Σ du troisième ordre du point I à l'infini a ce point pour point double et a même cylindre asymptote que la surface proposée; le cylindre asymptote et la surface Σ se coupent suivant six droites parallèles à la génératrice G; ce sont les six tangentes inflexionnelles.

Un plan quelconque passant par une tangente inflexionnelle coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en I à l'infini; une des tangentes en ce point double est la tangente inflexionnelle, laquelle a avec la courbe un contact du second ordre; c'est donc une tangente d'inflexion. Le plan tangent au cylindre suivant une tangente inflexionnelle coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement est la tangente inflexionnelle, laquelle a un contact du second ordre avec la courbe; c'est un rebroussement de deuxième espèce.

II. Discussion des points doubles à l'infini.

21. Nous classerons les variétés d'un point double d'après la nature du cylindre asymptote correspondant à ce point.

1[er] cas. *Le cylindre asymptote est un cylindre parabolique.*

Les propriétés générales résumées dans le no. 20 ont encore lieu dans ce cas; seulement la section, dont le point de rebroussement a pour tangente une droite à l'infini, est faite ici par le plan à l'infini, car le plan asymptote du cylindre parabolique est à l'infini; ce plan est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant l'arête G, laquelle est alors une arête de rebroussement (car les termes du second degré de l'équation (30.) forment un carré parfait, et ces termes donnent en même temps les plans tangents (32.) au cône suivant l'arête double).

En outre, les plans parallèles aux plans diamétraux du cylindre parabolique coupent la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, une des tangentes est à l'infini, l'autre est la génératrice à distance finie intersection du cylindre par le plan sécant.

22. 2[ème] cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans qui se coupent.*

Prenons pour axe des z la droite intersection des deux plans, et un de ces plans pour plan des xz; nous servant alors des équations (38.), (39.) et (37.), il faudra supposer

$$A = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 0; \quad A_2 = 0;$$

les surfaces Γ et Σ auront alors pour équations respectives

$$(\Gamma) \qquad 2Bxy + Cy^2 = 0;$$

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + (m-2)[2Bxy + Cy^2]z \\ \quad + t(a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2) + t^2(a_2x + b_2y) + A_3t^3 \end{array} \right\} = 0;$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, φ_{m-3} se réduiront à la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_m \quad = \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3} + (2Bxy + Cy^2)z^{m-2}; \\ \varphi_{m-1} = \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-2} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (a_3x + b_3y)z^{m-4} + A_3z^{m-3}. \end{array} \right.$$

Nous pouvons regarder le plan des yz comme un plan quelconque passant par l'axe du cylindre asymptote (deux plans qui se coupent); en faisant $x=0$, nous obtiendrons pour équation de la section de la surface par ce plan:

$$(\cdots + Cy^2z^{m-2}) + t(\cdots + c_1y^2z^{m-3}) + t^2(\cdots + b_2yz^{m-3}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double: les deux tangentes en ce point double se confondent avec l'axe des z, et le contact est du premier ordre; on a donc un rebroussement de première espèce à l'infini, la droite oz est la tangente de rebroussement.

La section de la surface par le plan des xz $(y=0)$ c. à. d. par un des plans asymptotes a pour équation

$$(\cdots+ax^3z^{m-3})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+a_2xz^{m-3})+t^3(\cdots+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple de la section, car si l'on pose

$$x = kt,$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^3; les tangentes en ce point triple seront données par l'équation

$$ak^3+a_1k^2+a_2k+A_3=0, \quad \text{ou} \quad ax^3+a_1x^2t+a_2xt^2+A_3t^3=0;$$

ces trois droites sont précisément les intersections de la surface Σ par le plan $y=0$, c. à. d. les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Si l'on cherche l'intersection de la surface par le plan

$$x = ht$$

qu'on peut regarder comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique, on trouve une courbe ayant un point double à l'infini, les deux tangentes sont les intersections du plan sécant avec les deux plans asymptotes constituant le cylindre asymptote.

Considérons enfin l'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle à l'un des plans asymptotes, $y=0$ par exemple; soit

$$y = ht;$$

l'équation de la section par ce plan est

$$\left.\begin{array}{l}[\cdots+(ax^3+3bhx^2t+3ch^2xt^2+dh^3t^3)z^{m-3}+(2Bhxt+Ch^2t^2)z^{m-2}] \\ +t[\cdots+(a_1x^2+2b_1hxt+c_1h^2t^2)z^{m-3}]+t^2[\cdots+(a_2x+b_2ht)z^{m-3}]+t^3[\cdots+A_3z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0;$$

ou, en ordonnant,

$$x^3(\cdots+az^{m-3})+tx(\cdots+2Bhz^{m-2})+t^2(\cdots+Ch^2z^{m-2})+t^3(\cdots)+\cdots = 0.$$

La direction asymptotique $x=0$ correspond à un point double, car si l'on pose

$$t = kx,$$

on voit que le premier membre de l'équation précédente est divisible par x^2;

les tangentes au point double sont données par l'équation

$$2Bhk + Ch^2k^2 = 0, \quad \text{ou} \quad 2Bxt + Cht^2 = 0;$$

une des tangentes est la droite à l'infini $t = 0$, l'autre est la droite $2Bx + Cht = 0$: il est visible que cette dernière droite est l'intersection du plan sécant $y - ht = 0$ avec le second plan asymptote $2Bx + Cy = 0$.

Ainsi:

Le cylindre asymptote se réduisant à deux plans qui se coupent (que je nommerai plans asymptotes du point double), l'axe des deux plans asymptotes est parallèle à la direction asymptotique; les tangentes inflexionnelles sont les intersections de la surface polaire Σ par chacun des plans asymptotes.

Tout plan passant par l'intersection des deux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement en I à l'infini; pour toutes ces sections la tangente de rebroussement est l'intersection des deux plans asymptotes; on pourrait donner à ce point double particulier le nom de point de rebroussement conique, et à la tangente commune celui d'axe de rebroussement.

Chaque plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I à l'infini; les trois tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Un plan quelconque parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en I; les deux tangentes sont les intersections des deux plans asymptotes par le plan sécant.

Un plan quelconque parallèle à l'un des plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; l'une des tangentes est l'intersection du second plan asymptote par le plan sécant, et la seconde tangente est à l'infini, parallèle à la génératrice G.

23. 3ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans parallèles.*

Prenons la direction asymptotique pour axe des z et l'un des plans pour plan des xz; nous servant alors des équations (38.) et (39.), il faudra supposer

$$A = 0, \quad B = 0; \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

les surfaces Γ et Σ auront pour équations respectives

$$(\Gamma) \qquad Cy^2 + B_1 yt = 0,$$

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{c} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + (m-2)Cy^2z + t[a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2] \\ + (m-2)B_1yzt + t^2(a_2x + b_2y) + A_3t^3 \end{array} \right\} = 0;$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, ... se réduiront à la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_m &= \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3} + Cy^2z^{m-2};\\
\varphi_{m-1} &= \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2};\\
\varphi_{m-2} &= \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3};\\
\varphi_{m-3} &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + A_3z^{m-3}.
\end{aligned}$$

La section de la surface par le plan des xz ou $y=0$, lequel est un des deux plans asymptotes, a pour équation

$$(\cdots + ax^3z^{m-3}) + t(\cdots + a_1x^2z^{m-3}) + t^2(\cdots + a_2xz^{m-3}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple; si l'on pose $x = kt$, on aura les tangentes en ce point triple en égalant à zéro le coefficient de t^3, ce qui donne

$$ak^3 + a_1k^2 + a_2k + A_3 = 0, \quad \text{ou} \quad ax^3 + a_1x^2t + a_2xt^2 + A_3t^3 = 0;$$

on voit que ces trois droites sont les intersections de la surface Σ par le plan $y=0$, c. à. d. les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Cherchons maintenant l'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle aux plans asymptotes, savoir par

$$y = ht;$$

on a pour équation de la section:

$$\left.\begin{aligned}
&[\cdots + (ax^3 + 3bhx^2t + 3ch^2xt^2 + dh^3t^3)z^{m-3} + Ch^2t^2z^{m-2}]\\
&+ t[\cdots + (a_1x^2 + 2b_1hxt + c_1h^2t^2)z^{m-3} + B_1htz^{m-2}]\\
&+ t^2[\cdots + (a_2x + b_2ht)z^{m-3}] + t^3[\cdots + A_3z^{m-3}] + \cdots
\end{aligned}\right\} = 0;$$

ou, en ordonnant,

$$\left.\begin{aligned}
&(\cdots + ax^3z^{m-3}) + t[\cdots + (3bh + a_1)x^2z^{m-3}] + t^2[\cdots + (Ch^2 + B_1h)z^{m-2}]\\
&\qquad + t^3[\cdots + (dh^3 + c_1h^2 + b_2h + A_3)z^{m-3}] + \cdots
\end{aligned}\right\} = 0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; et en posant $t = kx$, on trouve, en égalant à zéro le coefficient de x^2,

$$k^2 = 0, \quad \text{ou} \quad t^2 = 0;$$

on a donc un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à l'infini.

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; la section de la surface par ce plan possède un point double à l'infini, les tangentes en ce point double sont les intersections des deux plans asymptotes parallèles par le plan sécant.

Ainsi:

*Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans parallèles (que je nommerai **plans asymptotes** du point double), tout plan parallèle aux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement en I à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini dans le plan sécant et parallèle à la direction asymptotique; le point double de la surface peut encore être désigné sous le nom de **point de rebroussement conique**, mais l'**axe de rebroussement** est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique.*

Chacun des deux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini; les tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, les tangentes en ce point sont les intersections du plan sécant avec les deux plans asymptotes.

24. 4ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents.*

Prenons pour axe des z la direction asymptotique, et, pour plan des xz, le plan auquel se réduit le cylindre asymptote; on devra avoir (équation (38.))

$$A=0,\quad B=0;\quad A_1=0,\quad B_1=0;\quad A_2=0;$$

le cylindre asymptote et la surface Σ ont alors respectivement pour équations

$$(\Gamma)\qquad y^2 = 0,$$

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+(m-2)Czy^2+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2) \\ \qquad\qquad +t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 = 0; \end{cases}$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, ... prennent la forme

$$\varphi_m = \cdots\cdots+(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+Cy^2z^{m-2};$$
$$\varphi_{m-1} = \cdots\cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-2} = \cdots\cdots\cdots\cdots+(a_2x+b_2y)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_3x+b_3y)z^{m-4}+A_3z^{m-3}.$$

Le plan des xz ou $y=0$ coupe la surface suivant la courbe

$$(\cdots+ax^3z^{m-3})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+a_2xz^{m-3})+t^3(\cdots+a_3xz^{m-4}+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple; les tangentes inflexionnelles se réduisent, dans le cas actuel, à trois systèmes de deux droites confondues; ces trois droites sont les tangentes au point triple.

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$(\cdots+Cy^2z^{m-2})+t(\cdots+c_1y^2z^{m-3})+t^2(\cdots+b_2yz^{m-3})+t^3(\cdots+b_3yz^{m-4}+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double, les deux tangentes au point double se confondent avec l'axe des z; c'est donc un point de rebroussement.

Si l'axe des z est une tangente inflexionnelle, c. à. d. si $A_3=0$, la tangente de rebroussement a un contact du second ordre; c'est un rebroussement de 2ème espèce.

L'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle au plan asymptote, tel que $y=ht$, a pour équation

$$[\cdots+(ax^3+3bhx^2t+3ch^2xt^2+dh^3t^3)z^{m-3}+Ch^2t^2z^{m-2}]+t[\cdots+(a_1x^2+2b_1hxt+c_1h^2t^2)z^{m-3}]$$
$$+t^2[\cdots+(a_2x+b_2ht)z^{m-3}]+t^3[\cdots+A_3z^{m-3}]+\cdots=0,$$

ou, en ordonnant,

$$\left.\begin{array}{l}(\cdots+ax^3z^{m-3})+t[\cdots+(3bh+a_1)x^2z^{m-3}]+t^2[\cdots+Ch^2z^{m-2}]\\ \quad+t^3[\cdots+(dh^3+c_1h^2+b_2h+A_3)z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; en posant $t=kx$ et en égalant à zéro le coefficient de x^2, on a pour les tangentes

$$k^2=0,\quad \text{ou}\quad t^2=0;$$

on a donc un point de rebroussement dont la tangente est à l'infini.

Ainsi:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents (que je nommerai plan asymptote du point double), un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant en I à l'infini un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote; c'est un rebroussement de première espèce; le rebroussement est de deuxième espèce, lorsque le plan sécant passe par une des tangentes inflexionnelles. Ainsi, toutes les tangentes de rebroussement, au lieu de se confondre comme dans le deuxième cas avec une seule droite, sont ici toutes dans un même plan asymptote. On pourrait donc donner à ce point double à l'infini le nom de point de rebroussement plan, et le plan asymptote serait le plan de rebroussement.

Le plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini, les tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles, intersections de la surface Σ par le plan asymptote.

Un plan quelconque parallèle au plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini, parallèle à la génératrice G.

25. 5ième cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans, dont un à l'infini.*

Si l'on se reporte à l'équation générale (30.), on voit que ce cas se présentera lorsque la direction asymptotique G sera une arête triple du cône C et une arête simple pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$.

En prenant pour axe des z la direction asymptotique et en supposant que le plan des xz soit le plan à distance finie, on à d'après les équations (38.), (39.), (37.),

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

d'où

$$(P) \qquad B_1 yt = 0.$$

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} & ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + t[a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + (m-2)B_1yz] \\ & \qquad + t^2(a_2x + b_2y) + A_3t^3 = 0; \end{aligned} \right.$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-1} &= \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2}; \\ \varphi_{m-2} &= \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-3} &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (a_3x + b_3y)z^{m-4} + A_3z^{m-3}. \end{aligned}$$

Trois des tangentes inflexionnelles sont les intersections du plan à l'infini avec les trois plans

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0;$$

et les trois autres sont

$$y = 0, \quad ax^3 + a_1x^2t + a_2xt^2 + A_3t^3 = 0.$$

L'intersection de la surface par le plan des yz, que nous pouvons regarder comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique, a pour équation

$$(\cdots + dy^3z^{m-3}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + b_2yz^{m-3}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0.$$

La direction asymptotique $y = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; en posant successivement $y = kt$, puis $t = k_1y$, on obtiendra les deux tangentes

en ce point double, qui sont: l'une, l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote à distance finie; l'autre, à l'infini. Lorsque l'axe des z est une des tangentes inflexionnelles, la première tangente a un contact du second ordre.

Par une analyse semblable à celle que nous avons déjà repétée plusieurs fois, on constatera que l'intersection de la surface par un plan parallèle au plan des xz a un point de rebroussement à l'infini dont la tangente est ellemême à l'infini.

Ainsi:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans dont un est à l'infini, la direction asymptotique G est une arête triple du cône C et une arête simple pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$; *trois des tangentes inflexionnelles sont dans le plan à l'infini. Le plan asymptote à distance finie est parallèle au plan tangent au cône* $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$ *suivant l'arête G; les trois tangentes inflexionnelles à l'infini sont respectivement dans les plans tangents au cône C suivant l'arête triple G.*

Tout plan parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; une des tangentes est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique; l'autre est l'intersection par le plan sécant du plan asymptote à distance finie.

Tout plan parallèle au plan asymptote à distance finie coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique.

Les deux plans asymptotes coupent la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini, les tangentes en ce point sont les tangentes inflexionnelles.

26. 6ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents et à l'infini.*

Si l'on se reporte à l'équation générale (30.), on voit que ce cas se présentera lorsque la direction asymptotique G sera une arête triple du cône C et une arête double pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$.

On a alors, d'après les équations (37.), (38.), (39.):

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 0;$$

$$(\Sigma) \begin{cases} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2[a_2x+b_2y+(m-2)A_2z]+A_3t^3 \\ \qquad = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_m = \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-1} = \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-2} = \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3} + A_2z^{m-2};$$
$$\varphi_{m-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + A_3z^{m-3}.$$

Les tangentes inflexionnelles se réduisent à trois groupes de deux droites coincidentes situées dans le plan à l'infini et dans les trois plans tangents au cône C_0 suivant l'arête triple G.

Le plan des xz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; son intersection avec la surface est

$$(\cdots + ax^3z^{m-3}) + t(\cdots + a_1x^2z^{m-3}) + t^2(\cdots + A_2z^{m-2}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; et, en posant $t = kx$, on trouve pour l'équation des tangentes en ce point double

$$k^2 = 0, \quad \text{ou} \quad t^2 = 0.$$

Donc:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans confondus avec le plan de l'infini, un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini dans le plan asymptote; on a ainsi un point de rebroussement plan, mais le plan de rebroussement est à l'infini.

Le plan à l'infini coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I, les tangentes en ce point sont les intersections par le plan à l'infini des trois plans tangents au cône C suivant l'arête triple G.

27. **Remarque I.** Il peut arriver, dans le cas d'un point double à l'infini sur la surface, que la surface Σ (36.) se réduise à un cône, ou bien à un cylindre non parallèle à la direction asymptotique; mais ceci ne se présentera que pour certaines positions particulières des tangentes inflexionnelles, lorsque, par exemple, plusieurs de ces tangentes se confondent, ou s'éloignent à l'infini, etc. . . . Nous obtiendrions alors des variétés du point double renfermées dans les cas particuliers que nous venons d'étudier; mais nous devons laisser de côté cet examen qui allongerait démesurément cette discussion déjà fort étendue. D'ailleurs les hypothèses que nous avons parcourues nous ont donné les cas généraux de la discussion des points doubles; ces cas doivent évidemment correspondre aux formes spéciales que peut présenter le *cylindre asymptote*.

Cependant il est important de remarquer que, dans le cas d'un point double, la surface Σ ne peut pas se réduire à *un cylindre parallèle à la direction asymptotique*. Car, prenant la direction asymptotique pour axe des z et faisant usage de l'équation (39.), on devrait avoir

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0;\quad A_1=0,\quad B_1=0;\quad A_2=0.$$

L'équation (38.) du cylindre asymptote se réduirait, dans ce cas, à une identité; par suite, on conclurait de l'équation générale (30.)

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}=0;$$

$$\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

et on voit alors, par l'équation (6.), que *le point I à l'infini serait un point triple de la surface.*

28. Remarque II. La discussion des points multiples d'ordre supérieur au second serait excessivement compliquée; elle exigerait d'ailleurs, pour être complète, des notions plus étendues que celles que nous possédons sur les courbes et les surfaces d'ordre supérieur.

Je me contenterai de signaler les cas suivants, pour montrer comment la méthode analytique se prête avec facilité à l'étude et à la discussion des points à l'infini.

1°. *Les fonctions φ_m et φ_{m-1} sont respectivement de la forme*

$$(40.)\quad \begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = [f(x,y,z)]^2\varphi(x,y,z), \\ \varphi_{m-1}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\psi(x,y,z). \end{cases}$$

Considérons une direction asymptotique (α,β,γ) située sur le cône

$$f(x,y,z)=0,\quad \text{de sorte que}\quad f(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

le point à l'infini correspondant $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ est un point double de la surface; le cylindre asymptote (30.) a pour équation

$$(41.)\quad \left\{\begin{aligned}&\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\left[x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}+z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right]^2+t\,\psi(\alpha,\beta,\gamma)\left[x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}+z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right]\\ &+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}\right\}=0.$$

Cette équation représente deux plans parallèles, le point double est, par suite, un point de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini [n°. 23].

Donc chaque point de la courbe à l'infini

$$f(x,y,z)=0,\quad t=0,$$

est un point double de la surface; ce sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini.

Pour les directions asymptotiques, intersections des deux cônes

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les points de la courbe sont des points de rebroussement de la nature de ceux qui ont été étudiés au [n°. 25], car alors le cylindre asymptote se compose de deux plans dont un est à l'infini.

II°. *L'équation de la surface U est de la forme*

$$(42.) \quad [f(x, y, z)]^p + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + \cdots = 0;$$

de sorte que, si q est le degré de $f(x, y, z)$, on a

$$pq = m;$$

nous supposons, en outre, que la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ n'admet pas en facteur la fonction $f(x, y, z)$.

Considérons une direction asymptotique $G(\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaisant à la relation

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

le point à l'infini $I\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},\ t = 0\right)$ est un point simple de la surface, le plan asymptote correspondant est à l'infini.

Pour mieux connaître la nature du contact en un tel point, étudions la section de la surface par un plan quelconque passant par le point I, c. à. d. parallèle à la direction asymptotique G. On peut supposer que cette direction soit prise pour axe des z, alors

$$(1°.) \quad f(x, y, z) = \cdots + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)z^{q-2} + (ax + by)z^{q-1}.$$

Le plan des xz ou $y = 0$ peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la droite G; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$(\cdots + axz^{q-1})^p + t(\cdots + a_1 z^{m-1}) + t^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et si l'on pose $t = kx$, on a

$$x^p(\cdots + az^{q-1})^p + kx(\cdots + a_1 z^{m-1}) + k^2x^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0.$$

Pour avoir la tangente, il faut égaler à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k = 0$; le premier membre de l'équation précédente est alors divisible par x^p; l'asymptote, laquelle est à l'infini, a donc avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Si dans la valeur (1°.) de $f(x, y, z)$ on suppose $a = 0$, le plan des xz est alors tangent au cône $f(x, y, z)$ des directions asymptotiques; la section par le plan $y = 0$ a, dans ce cas, pour équation

$$(\cdots + Ax^2 z^{q-2})^p + t(\cdots + a_1 z^{m-1}) + t^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et, si l'on pose $t = kx$, on a

$$x^{2p}(\cdots + Az^{q-2})^p + kx(\cdots + a_1 z^{m-1}) + k^2 x^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0.$$

Pour avoir la tangente, il faut égaler à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k = 0$; le premier membre de l'équation précédente est alors divisible par x^{2p}; l'asymptote, laquelle est à l'infini, a donc avec la courbe un contact du $(2p-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Ainsi:

Lorsque l'équation de la surface se présente sons la forme (42.), le plan à l'infini est un plan tangent multiple et touche la surface suivant la courbe à l'infini

$$f(x, y, z) = 0, \quad t = 0;$$

en chaque point de cette courbe, le contact du plan à l'infini avec la surface est du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre. Car, si nous considérons un de ces points, I par exemple, un plan quelconque passant par le point I coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple à l'infini, et la tangente à la courbe en ce point, laquelle tangente est aussi à l'infini, a avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre; donc le plan à l'infini est tel que toutes les droites, situées dans ce plan et passant par I, c. à. d. parallèles à la direction asymptotique G, rencontrent la surface en p points coincidant avec le point I.

Le plan tangent au cône $f(x, y, z) = 0$ suivant l'arête G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple à l'infini; la tangente à la courbe en ce point, tangente qui est elle-même à l'infini, a avec la courbe un contact du $(2p-1)^{\text{ème}}$ ordre, c. à. d. rencontre la surface en $2p$ points coincidant avec le point I.

III°. *L'équation de la surface est de la forme*

$$(43.) \qquad \varphi_m(x, y, z) = t^m.$$

Tous les plans asymptotes enveloppent le cône

$$\varphi_m(x, y, z) = 0.$$

Si nous considérons une génératrice quelconque G de ce cône, par exemple,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \varrho, \quad \text{avec } \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et si nous cherchons son intersection avec la surface, on trouve

$$\varrho^m \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = t^m, \quad \text{ou} \quad t^m = 0;$$

donc cette droite rencontre la surface en m points coincidant avec le point I à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},\ t = 0\right)$.

On voit, par l'équation (6.), qu'une droite quelconque parallèle à la génératrice G ne rencontre la surface qu'en un seul point à l'infini.

Pour étudier la nature du contact au point I, prenons la direction asymptotique pour axe des z et le plan tangent au cône pour plan des xz, de sorte que

$$(44.) \qquad \varphi_m(x, y, z) = \cdots + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)z^{m-2} + byz^{m-1}.$$

La section par le plan asymptote ou $y = 0$ a pour équation

$$(\cdots + Ax^2 z^{m-2}) - t^m = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; les deux tangentes se confondent avec l'axe des z; et, pour $x = 0$, le premier membre de l'équation est divisible par t^m, c. à. d. que le contact et du $(m-2)^{\text{ème}}$ ordre.

La section par un plan quelconque passant par la génératrice G, c. à. d. par le plan $x = 0$ qui peut être considéré comme tel, a pour équation

$$(\cdots + Cy^2 z^{m-2} + byz^{m-1}) - t^m = 0;$$

la direction asymptotique $y = 0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et si l'on pose $y = kt$, on trouve pour déterminer la tangente $k = 0$, et le premier membre est alors divisible par t^m.

La section par un plan quelconque parallèle au plan asymptote, par le plan $y - ht = 0$ par exemple, a pour équation

$$\cdots + (Ax^2 + 2Bhxt + Ch^2t^2)z^{m-2} + bhtz^{m-1} - t^m = 0;$$

ou, en ordonnant,

$$x^2(\cdots + Az^{m-2}) + t(\cdots + 2Bhxz^{m-2} + bhz^{m-1}) + t^2(\cdots) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ correspond à un point simple; et, en posant $t = k'x$, on trouve la tangente en égalant à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k' = 0$, et le premier membre est divisible par x^2; l'asymptote est donc à l'infini et a avec la courbe un contact du premier ordre.

Un plan quelconque parallèle au plan des yz, $x-ht=0$ par exemple, peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la génératrice G; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$\cdots+(Ah^2t^2+2Bhyt+Cy^2)z^{m-2}+byz^{m-1}-t^m = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$(\cdots+byz^{m-1})+t(\cdots+2Bhyz^{m-2})+t^2(\cdots+Ah^2z^{m-2})+t^3(\cdots)+\cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ correspond à un point simple; si l'on pose $y=\lambda t$, on trouve pour déterminer la tangente $\lambda=0$, et le premier membre de l'équation devient divisible par t^2 seulement.

Ainsi:

Lorsque l'équation de la surface est de la forme

$$\varphi_m(x,y,z) = t^m,$$

tous les plans asymptotes enveloppent le cône $\varphi_m(x,y,z)=0$.

Une génératrice quelconque G de ce cône rencontre la surface en m points coïncidents à l'infini.

Si nous considérons le point I à l'infini sur la génératrice G, on constate que:

Le plan asymptote en I coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement en I; la tangente de rebroussement, ou la génératrice G, a avec la courbe un contact du $(m-2)^{\text{ème}}$ ordre.

Un plan quelconque parallèle au plan asymptote coupe la surface suivant une courbe passant par le point I, lequel est un point simple de la courbe; l'asymptote, qui est à l'infini parallèle à la génératrice G, a avec la courbe un contact du premier ordre.

Un plan quelconque passant par la génératrice G coupe la surface suivant une courbe passant par le point I, qui est un point simple; la tangente en ce point simple est la génératrice G, laquelle a avec la courbe un contact du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Tout plan parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple; la tangente est l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote, le contact est du premier ordre; cette droite, située dans le plan asymptote et parallèle à la génératrice G, ne rencontre donc la surface qu'en deux points coïncidents; et, par suite, le plan asymptote n'a avec la surface qu'un contact du premier ordre.

IV°. Je terminerai par *l'examen du cas où la surface possède une droite double à l'infini.*

L'équation de la surface est alors de la forme

$$(45.)\quad (Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0.$$

Un plan quelconque passant par la droite à l'infini

$$(D)\qquad P = Ax+By+Cz=0,\quad t=0,$$

par exemple

$$Ax+By+Cz = \lambda t,$$

rencontre la surface suivant deux droites coincidant avec la droite D à l'infini, car le premier membre de l'équation est divisible par t^2, quel que soit λ; la droite D est donc une *droite double*.

Pour une direction asymptotique quelconque (α,β,γ) parallèle au plan P, c. à. d. telle, que l'on ait

$$A\alpha+B\beta+C\gamma = 0,$$

l'équation du plan asymptote se réduit à une identité; et le cylindre asymptote (30.) a pour équation

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]^2+t\psi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Les conclusions énoncées au n°. 28, Remarque II, 1° sont applicables ici;

c. à. d. que tous les points de la droite D sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini; les $(m-2)$ points situés sur les droites d'intersection du plan P avec le cône $\varphi(x,y,z)$ sont des points de rebroussement de la nature de ceux qui ont été étudiés au n°. 25, le cylindre asymptote se compose alors de deux plans dont un est à l'infini.

On constate sans difficulté, en prenant le plan P pour plan des xz par exemple, que:

la section de la surface par le plan P se compose de deux fois la droite à l'infini D et d'une courbe d'ordre $(m-2)$;

la section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan P se compose de la droite D et d'une courbe d'ordre $(m-1)$;

la section de la surface par un plan quelconque a un point double à l'infini au point où le plan sécant rencontre la droite D, la direction asymptotique est l'intersection du plan P avec le plan sécant; et les deux tangentes sont les intersections du plan sécant avec le cylindre asymptote correspondant à cette direction asymptotique.

Douai, 1864.

Deuxième Partie.

§. 1.

Definition et ordre de la surface asymptote.

1. La surface proposée ayant pour équation

$$U = \varphi_m(x, y, z) + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + t^2\varphi_{m-2}(x, y, z) + \cdots = 0$$

l'équation du plan asymptote au point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, t = 0\right)$ est

$$(1.)\ (P) \qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} + t\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

avec la condition

$$(1^{\text{bis}}.) \qquad \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les plans asymptotes enveloppent une surface développable, car les coefficients de l'équation (1.) ne dépendent en réalité que d'un seul paramètre arbitraire; j'appellerai *Développable asymptote* de la surface U la surface enveloppée par les plans asymptotes de U; ou, ce qui revient au même, la surface circonscrite à la surface U suivant la courbe d'intersection avec le plan à l'infini.

Cette développable est de la classe $m(m-1)$; car, par un point quelconque (x_0, y_0, z_0, t_0) passent $m(m-1)$ plans tangents (P), comme il est visible d'après les équations (1.) et (1bis.).

2. Lorsque l'équation de la surface U peut être amenée à ne plus contenir de termes de degré $(m-1)$, la développable se réduit à un cône que nous nommerons *cône asymptote* de la surface. Dans ce cas, en effet, les coefficients de la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ sont nuls; par suite, les plans (P) passent constamment par l'origine et enveloppent évidemment le cône

$$(C) \qquad \varphi_m(x, y, z) = 0.$$

Réciproque: Supposons que tous les plans asymptotes enveloppent un cône c. à. d. passent par un point fixe; nous pouvons prendre pour origine le sommet du cône. L'équation de la surface, rapportée à la nouvelle origine,

étant supposée de la forme

$$\varphi_m(x, y, z) + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + t^2\varphi_{m-2}(x, y, z) + \cdots = 0,$$

on devra avoir

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

pour toutes les solutions possibles (α, β, γ) de l'équation

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ces deux équations doivent donc avoir une infinité de solutions communes; ou mieux, toutes les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$ doivent se trouver sur le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z)$; ce qui est évidemment impossible, à moins que la fonction du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, $\varphi_{m-1}(x, y, z)$, ne soit identiquement nulle. Ainsi:

„Lorsque les plans asymptotes d'une surface enveloppent un cône, l'équation de la surface peut toujours être amenée à ne plus renfermer les termes de degré $(m-1)$."

3. Etudions maintenant la surface asymptote dans le cas le plus général. En désignant par P le premier membre de l'équation (1.), nous aurons pour les équations d'une génératrice quelconque de la développable asymptote

$$(2.)\ (\delta)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \beta}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \gamma}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \gamma}}, \quad \text{avec} \quad \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

l'équation (1.) est une conséquence des équations (2.).

La droite (δ) est parallèle à la génératrice $G(\alpha, \beta, \gamma)$ du cône des directions asymptotiques, car cette droite passe par le point à l'infini

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad t = 0.$$

De plus, si nous nous reportons à l'équation (12.) [§. I., 1ère partie] de la surface S, on voit que les équations des plans des centres sont

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \gamma} = 0;$$

donc *la génératrice (δ) de la développable asymptote passe par le centre de la surface S correspondant à la direction asymptotique parallèle à cette droite (δ).*

Le lieu des centres des surfaces (S) est une courbe dont les équations s'obtiennent en éliminant α, β, γ entre les quatre équations

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0, \\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0. \end{cases}$$

L'ordre de la courbe, lieu des centres, est le nombre de points où elle est coupée par un plan quelconque

$$Mx+Ny+Pz+Qt = 0;$$

le nombre de ces points est égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \\ M & N & P & Q \end{vmatrix} = 0, \quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

lequel nombre est visiblement égal à $3m(m-2)$.

Ainsi *les centres des surfaces S* [(12.) §. I., 1ère partie] *décrivent une courbe d'ordre* $3m(m-2)$, *en général; et cette courbe est sur la développable asymptote.*

L'ordre de cette courbe est précisément égal au nombre des arêtes d'inflexion du cône des directions asymptotiques, si l'on suppose que ce cône soit le plus général de son espèce c. à. d. n'ait pas d'arêtes multiples. Nous ferons encore observer que la courbe, lieu des centres des surfaces *S*, n'est pas l'arête de rebroussement de la développable asymptote.

4. Comme les calculs que nous allons développer présentent une certaine complication, il sera avantageux de modifier la notation que nous avons adoptée jusqu'à présent.

Nous remplacerons les variables x, y, z par x_1, x_2, x_3; les quantités α, β, γ, qui désignent habituellement la direction asymptotique seront remplacées par x_1^0, x_2^0, x_3^0; les fonctions $\varphi_m(x,y,z)$, $\varphi_{m-1}(x,y,z)$ seront représentées respectivement par $u(x_1,x_2,x_3)$, $v(x_1,x_2,x_3)$. Formant le tableau

de ces changements:

on remplacera		$x, y, z,$	par	$x_1, x_2, x_3;$
-	-	$\alpha, \beta, \gamma,$	-	$x_1^0, x_2^0, x_3^0;$
-	-	$\varphi_m(x, y, z)$	-	$u(x_1, x_2, x_3);$
-	-	$\varphi_{m-1}(x, y, z)$	-	$v(x_1, x_2, x_3).$

Suivant l'usage, nous poserons

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial x_r}, \quad u_{rs} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}, \quad v_r = \frac{\partial v}{\partial x_r};$$

nous conviendrons, en outre, d'indiquer par l'indice supérieur 0 la substitution des valeurs particulières x_1^0, x_2^0, x_3^0 aux variables x_1, x_2, x_3; nous aurons ainsi

$$u^0 = u(x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

$$u_r^0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)_0, \quad u_{rs}^0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right)_0, \quad \text{etc.}$$

en convenant aussi d'indiquer par la notation $(\ )_0$ la substitution ci-dessus mentionnée.

5. Ces notations étant admises, les équations d'une génératrice (δ) de la surface asymptote seront

$$(3.)\ (\delta) \qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_1^0}}{u_1^0} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_2^0}}{u_2^0} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_3^0}}{u_3^0}, \quad \text{avec} \quad u^0 = 0,$$

équations dans lesquelles

$$(4.) \qquad P = x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0.$$

Nous poserons encore

$$(5.) \qquad H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \qquad H_{rs} = \frac{\partial H}{\partial u_{rs}}.$$

Le théorème des fonctions homogènes nous donne les identités

$$(6.) \qquad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = m u;$$

$$(7.) \qquad x_1 u_{r1} + x_2 u_{r2} + x_3 u_{r3} = (m-1) u_r, \quad \text{où} \quad r = 1, 2, 3.$$

La résolution des trois équations (7.) par rapport à x_1, x_2, x_3, conduit à

$$(8.) \qquad x_r H = (m-1)[u_1 H_{r1} + u_2 H_{r2} + u_3 H_{r3}], \quad \text{où} \quad r = 1, 2, 3.$$

6. Les équations (3.) de la génératrice (δ) peuvent s'écrire

$$(9.)\quad \begin{cases} x_1 u_{11}^0 + x_2 u_{12}^0 + x_3 u_{13}^0 + t v_1^0 = \lambda u_1^0, \\ x_1 u_{21}^0 + x_2 u_{22}^0 + x_3 u_{23}^0 + t v_2^0 = \lambda u_2^0, \\ x_1 u_{31}^0 + x_2 u_{32}^0 + x_3 u_{33}^0 + t v_3^0 = \lambda u_3^0 \\ \text{avec la condition} \\ \qquad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = u^0 = 0. \end{cases}$$

Multipliant ces dernières équations respectivement par H_{11}^0, H_{21}^0, H_{31}^0; puis par H_{12}^0, H_{22}^0, H_{32}^0; etc. et ajoutant, on donnera aux équations de la génératrice la forme suivante

$$(10.)\ (\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{H^0 x_1 + G_1^0 t}{x_1^0} = \dfrac{H^0 x_2 + G_2^0 t}{x_2^0} = \dfrac{H^0 x_3 + G_3^0 t}{x_3^0}, \\ \text{avec}\quad u^0 = 0; \end{cases}$$

en désignant par les lettres G_1, G_2, G_3 les fonctions dont le type général est:

$$(11.)\qquad G_r = v_1 H_{r1} + v_2 H_{r2} + v_3 H_{r3}, \quad \text{où}\quad r = 1, 2, 3.$$

En multipliant les trois égalités (11.) par u_1, u_2, u_3, et ajoutant, on a, d'après (8.) et (6.):

$$(12.)\qquad u_1 G_1 + u_2 G_2 + u_3 G_3 = Hv.$$

7. Remarques. 1°. On voit encore, par les équations (10.), que la génératrice de la surface asymptote est parallèle à la direction asymptotique correspondante.

2°. Nous pouvons constater aussi que les coordonnées du centre de la surface (S) sont, d'après les équations qui le déterminent et les notations adoptées,

$$\frac{x_1}{t} = -\frac{G_1}{H}, \qquad \frac{x_2}{t} = -\frac{G_2}{H}, \qquad \frac{x_3}{t} = -\frac{G_3}{H};$$

la génératrice (δ) passe donc par le centre de la surface S qui correspond à la direction asymptotique parallèle à cette génératrice. Nous aurions pu profiter de cette propriété pour écrire immédiatement les équations (10.).

3°. Si l'équation de la surface peut être amenée à n'avoir plus de termes de degré ($m-1$), les équations (10.) de la génératrice deviendront

$$\frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3}{x_3^0}, \qquad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0;$$

il est alors visible que les génératrices (δ) décrivent le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$.

4°. Lorsque la solution (x_1^0, x_2^0, x_3^0) satisfait, en outre, à la condition

$$H(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \quad \text{ou}\quad H^0 = 0,$$

les équations (10.) donnent, dans ce cas, $t=0$; et les équations de la génératrice (δ) sont alors

$$t = 0,$$

$$(P) \qquad x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0;$$

cette génératrice est donc à l'infini dans le plan (P). Or le nombre des solutions du système

$$H=0, \qquad u=0,$$

est égal à $3m(m-2)$; donc

Il y a sur la surface asymptote $3m(m-2)$ droites à l'infini, parallèles aux $3m(m-2)$ arêtes d'inflexion du cône des directions asymptotiques; ces droites sont respectivement dans les plans asymptotes correspondant à ces arêtes.

Nous concluons de là que le plan à l'infini coupe la surface asymptote suivant ces $3m(m-2)$ droites, et, en outre, suivant une courbe du $m^{\text{ème}}$ ordre, laquelle est la courbe de contact de la surface asymptote avec la surface proposée U; donc la développable asymptote est de l'ordre

$$m+3m(m-2) \quad \text{ou} \quad m(3m-5),$$

résultat que nous retrouverons tout-à-l'heure par une autre méthode.

NB. Il peut arriver, pour certaines valeurs spéciales des coefficients, que la génératrice de la développable, correspondant à une arête d'inflexion, ne soit pas à l'infini. C'est ce qui a lieu dans la surface

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 t x_1 x_2 + t^2 \ldots = 0.$$

8. Ordre de la développable asymptote.

L'ordre de la développable est égal au nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite quelconque; nous résoudrons cette question en cherchant le nombre des génératrices (δ) rencontrant la droite arbitrairement choisie.

Les équations de cette droite peuvent se mettre sous la forme

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{x_1 - A_1 t}{a_1} = \dfrac{x_2 - A_2 t}{a_2} = \dfrac{x_3 - A_3 t}{a_3} = \varrho, \\ \text{ou} \\ x_1 = a_1 \varrho + A_1 t, \\ x_2 = a_2 \varrho + A_2 t, \\ x_3 = a_3 \varrho + A_3 t, \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3; A_1, A_2, A_3, désignant des constantes tout-à-fait arbitraires.

Pour obtenir l'intersection de cette droite avec la génératrice (δ), il faut remplacer x_1, x_2, x_3, par les valeurs précédentes dans les équations (10.); il vient alors

$$\frac{H^0 a_1 \varrho + (G_1^0 + A_1 H^0)t}{x_1^0} = \frac{H^0 a_2 \varrho + (G_2^0 + A_2 H^0)t}{x_2^0} = \frac{H^0 a_3 \varrho + (G_3^0 + A_3 H^0)t}{x_3^0}.$$

Pour que les deux droites se rencontrent, il faut et il suffit que les valeurs de $\frac{H^0 \varrho}{t}$ données par ces équations soient les mêmes, car les équations (13.) détermineront alors les coordonnées $\frac{x_1}{t}$, $\frac{x_2}{t}$, $\frac{x_3}{t}$ du point de rencontre. Si nous désignons par $-k$ la valeur commune des rapports ci-dessus, on a, en éliminant les indéterminées $H\varrho$, t, et k, l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & G_1^0 + A_1 H^0 \\ a_2 & x_2^0 & G_2^0 + A_2 H^0 \\ a_3 & x_3^0 & G_3^0 + A_3 H^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le nombre des génératrices (δ) rencontrées par la droite (13.) est donc égal au nombre des solutions (x_1, x_2, x_3) communes aux deux équations

$$(14.)\quad \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \\ u(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases}$$

homogènes en x_1, x_2, x_3.

Or les fonctions G_1, G_2, G_3, H sont du degré $3(m-2)$ en x_1, x_2, x_3; la 1ère équation est, par suite, du degré $3(m-2)+1$ ou $(3m-5)$; la 2ème est du degré m; donc

La surface développable asymptote est de l'ordre

$$N = m(3m-5).$$

Nous remarquerons de suite que l'équation de la développable asymptote ne dépend que des coefficients des fonctions u et v ou φ_m et φ_{m-1}.

§. II.

Influence des points doubles à l'infini de la surface U sur l'ordre de la développable asymptote.

I°. Identités.

9. On a d'abord les identités suivantes déjà écrites (6.) et (7.):

$$(1.)\qquad x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3 = mu, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{n=3} x_n u_n = mu,$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} x_1u_{r1}+x_2u_{r2}+x_3u_{r3} = (m-1)u_r, \quad \text{ou} \quad \sum\limits_{n=1}^{n=3} x_n u_{rn} = (m-1)u_r, \\ \qquad\text{où} \quad r = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

En différentiant une et deux fois les identités (2.), il vient

$$(3.)\qquad \sum_{n=1}^{n=3} x_n \frac{\partial u_{rn}}{\partial x_i} = (m-2)u_{ri},$$

$$(4.)\qquad \sum_{n=1}^{n=3} x_n \frac{\partial^2 u_{rn}}{\partial x_i \partial x_j} = (m-3)\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_r},$$

car

$$\frac{\partial u_{ri}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_r}.$$

N. B. Dorénavant, au lieu du signe sommatoire $\sum\limits_{n=1}^{n=3}$, nous écrirons seulement $\sum\limits^{n}$, en convenant d'indiquer par là qu'on devra faire la somme des résultats obtenus lorsqu'on donne à l'indice n les valeurs 1, 2, 3, dans l'expression soumise à ce signe.

Posant, comme nous l'avons déjà fait

$$(5.)\qquad H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad H_{rs} = \frac{\partial H}{\partial u_{rs}},$$

on a les identités

$$(6.)\qquad \begin{cases} \sum\limits^{n} u_{rn} H_{rn} = H, \\ \sum\limits^{n} u_{sn} H_{rn} = 0. \end{cases}$$

La résolution des équations (2.) par rapport à x_r donne

$$(7.)\qquad x_r H = (m-1)\sum^{n} u_n H_{rn}, \quad \text{où} \quad r = 1,\ 2,\ 3.$$

Différentiant une, deux, et trois fois ces dernières identités, on a successive-

ment, eu égard aux relations (6.);

$$(8.)\quad \begin{cases} x_r \dfrac{\partial H}{\partial x_r} = (m-2)H + (m-1)\overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}, \\ x_r \dfrac{\partial H}{\partial x_s} = (m-1)\overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}; \quad r \gtrless s. \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} x_r \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r^2} = (m-3)\dfrac{\partial H}{\partial x_r} + (m-1)\left[\overset{n}{\Sigma} u_{nr} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2}\right]; \\ x_r \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s} = (m-2)\dfrac{\partial H}{\partial x_s} + (m-1)\left[\overset{n}{\Sigma} u_{ns} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r \partial x_s}\right]; \quad r \gtrless s; \\ x_r \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i} = (m-1)\left[\overset{n}{\Sigma} u_{ni} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s \partial x_i}\right]; \quad \begin{cases} r \gtrless s \\ s \gtrless i \end{cases}; \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} x_r \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r^3} = (m-4)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r^2} + (m-1)\left[\begin{array}{c} 2\overset{n}{\Sigma} u_{nr} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2} \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{nr}}{\partial x_r} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r^3} \end{array}\right]; \\ x_r \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r^2 \partial x_s} = (m-3)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s} + (m-1)\left[\begin{array}{c} \overset{n}{\Sigma} u_{ns} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2} + \overset{n}{\Sigma} u_{nr} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r \partial x_s} \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{ns}}{\partial x_r} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r^2 \partial x_s} \end{array}\right], \quad r \gtrless s; \\ x_r \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i} + (m-1)\left[\begin{array}{c} \overset{n}{\Sigma} u_{ni} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s \partial x_r} + \overset{n}{\Sigma} u_{nr} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s \partial x_i} \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{ni}}{\partial x_r} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s} + \overset{n}{\Sigma} u_n \dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} \end{array}\right], \quad \begin{cases} r \gtrless s \\ r \gtrless i \end{cases}. \end{cases}$$

La différentiation successive des identités (6.) nous conduit à

$$(11.)\quad \begin{cases} \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_i} H_{rn} + \overset{n}{\Sigma} u_{rn} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_i} H_{rn} + \overset{n}{\Sigma} u_{sn} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} = 0, \quad r \gtrless s. \end{cases}$$

$$(12.)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{c} \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_i} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j} + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_j} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\ + \overset{n}{\Sigma} H_{rn} \dfrac{\partial^2 u_{rn}}{\partial x_i \partial x_j} + \overset{n}{\Sigma} u_{rn} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i \partial x_j} \end{array}\right\} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \left.\begin{array}{c} \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_i} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j} + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_j} \dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\ + \overset{n}{\Sigma} H_{rn} \dfrac{\partial^2 u_{sn}}{\partial x_i \partial x_j} + \overset{n}{\Sigma} u_{sn} \dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i \partial x_j} \end{array}\right\} = 0, \quad r \gtrless s. \end{cases}$$

Nous aurons encore à faire usage de l'identité suivante

$$(13.)\qquad H\frac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}} = H_{rs}H_{r_1 s_1} - H_{rs_1}H_{r_1 s}.$$

Différentiant successivement par rapport à x_i, x_j, x_k, on a l'identité

$$(14.)\qquad \left.\begin{array}{r} H\cdot\dfrac{\partial^3\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\ +\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}} \\ +\mathfrak{S}\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_i} \\ +\mathfrak{S}\dfrac{\partial H}{\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial^2\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_j\partial x_k} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} H_{rs}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{r_1 s_1}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + H_{r_1 s_1}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{rs}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\ +\mathfrak{S}\dfrac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{r_1 s_1}}{\partial x_j\partial x_k} \\ +\mathfrak{S}\dfrac{\partial H_{r_1 s_1}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rs}}{\partial x_j\partial x_k} \\ -H_{rs_1}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{r_1 s}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} - H_{r_1 s}\dfrac{\partial^3 H_{rs_1}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\ -\mathfrak{S}\dfrac{\partial H_{rs_1}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{r_1 s}}{\partial x_j\partial x_k} \\ -\mathfrak{S}\dfrac{\partial H_{r_1 s}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rs_1}}{\partial x_j\partial x_k}; \end{array}\right.$$

le signe $\mathfrak{S}$ indique une somme de termes formés par les combinaisons semblables des trois indices i, j et k.

10. Les fonctions G_r sont définies par les égalités (11.) du §. I.; on a

$$(15.)\qquad G_r = \sum^{n} v_n H_{rn},\quad \text{où } r = 1, 2 \text{ ou } 3.$$

On obtient en différentiant successivement:

$$(16.)\qquad \frac{\partial G_r}{\partial x_i} = \sum^{n} v_n\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} + \sum^{n} H_{rn}\frac{\partial v_n}{\partial x_i},$$

$$(17.)\qquad \frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i\partial x_j} = \begin{cases} +\sum^{n}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} + \sum^{n}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j} \\ \sum^{n} v_n\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j} + \sum^{n} H_{rn}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_j}, \end{cases}$$

$$(18.)\qquad \frac{\partial^3 G_r}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} = \left\{\begin{array}{l} \sum^{n} v_n\dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + \sum^{n} H_{rn}\dfrac{\partial^3 v_n}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\ +\sum^{n}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j} + \sum^{n}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_j}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_k} \\ +\sum^{n}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_j\partial x_k} + \sum^{n}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_j\partial x_k}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\ +\sum^{n}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_k} + \sum^{n}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_k}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j}. \end{array}\right.$$

Nous déduirons de suite de ces formules les différences suivantes qui se présenteront fréquemment dans nos calculs:

$$(19.)\quad \begin{cases} x_2 G_3 - x_3 G_2 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}), \\ x_3 G_1 - x_1 G_3 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_3 H_{1n} - x_1 H_{3n}), \\ x_1 G_2 - x_2 G_1 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_1 H_{2n} - x_2 H_{1n}). \end{cases}$$

$$(20.)\quad x_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i} = \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}).$$

$$(21.)\quad \begin{cases} x_2 \frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j} = \\ \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}) \\ + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_j} \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

$$(22.)\quad \begin{cases} x_2 \frac{\partial^3 G_3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - x_3 \frac{\partial^3 G_2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \\ \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \frac{\partial^3 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - x_3 \frac{\partial^3 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}) \\ + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} \left(x_2 \frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_k} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_k} \right) \\ + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \left(x_2 \frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_j \partial x_k} - x_3 \frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_j \partial x_k} \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) \\ + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_j} \left(x_2 \frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_k} - x_3 \frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_k} \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

IIº. Exposé de la question.

11. La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0), correspondant à un point double de la surface (U), doit satisfaire aux relations

$$(23.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \\ \text{et} \\ v(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = v^0 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que lorsqu'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, les termes du degré m (c. à. d. du degré le plus élevé) dans l'équation

de la surface U ne changent pas, mais les termes du degré $(m-1)$ sont altérés par cette transformation; autrement, lorsqu'on modifie la position des axes de coordonnées en les laissant parallèles, la fonction $\varphi_m(x, y, z)$ ou $u(x_1, x_2, x_3)$ reste la même, mais la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ ou $v(x_1, x_2, x_3)$ change de forme. Nous allons démontrer que

si l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ et située sur le cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, on peut, en général, transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière que cette arête soit aussi une arête double pour le cône représenté par l'ensemble des nouveaux termes du degré $(m-1)$.

Soit en effet, l'équation primitive de la surface U:

$$u(x_1; x_2, x_3) + tv(x_1, x_2, x_3) + t^2 w(x_1, x_2, x_3) + \cdots = 0$$

ou, en supposant $t = 1$:

$$(24.) \quad u(x_1, x_2, x_3) + v(x_1, x_2, x_3) + w(x_1, x_2, x_3) + \cdots = 0.$$

Posons

$$x_1 = a_1 + y_1, \quad x_2 = a_2 + y_2, \quad x_3 = a_3 + y_3;$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$(24^{\text{bis}}.) \quad u(y_1, y_2, y_3) + V(y_1, y_2, y_3) + W(y_1, y_2, y_3) + \cdots = 0,$$

où V désigne l'ensemble des nouveaux termes du degré $(m-1)$, et a pour valeur

$$(25.) \quad V(y_1, y_2, y_3) = a_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial u}{\partial y_3} + v(y_1, y_2, y_3).$$

Or si l'on suppose les relations (23.) vérifiées par la solution (x_1^0, x_2^0, x_3^0), on pourra disposer des arbitraires a_1, a_2, a_3, de façon que les valeurs

$$y_1 = x_1^0, \quad y_2 = x_2^0, \quad y_3 = x_3^0,$$

annulent les dérivées premières de la fonction V. En effet, ceci aura lieu, si

$$(26.) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 = a_1 u_{11}^0 + a_2 u_{12}^0 + a_3 u_{13}^0 + v_1^0 = 0, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 = a_1 u_{21}^0 + a_2 u_{22}^0 + a_3 u_{23}^0 + v_2^0 = 0, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_3}\right)_0 = a_1 u_{31}^0 + a_2 u_{32}^0 + a_2 u_{33}^0 + v_3^0 = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par x_1^0, x_2^0, x_3^0, et qu'on ajoute, on trouve

$$a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 + v^0 = 0,$$

ce qui est une identité, d'après les relations admises (23.). Les trois équations (26.) se réduisent donc à deux équations distinctes; on pourra, par suite transporter les axes d'une infinité de manières, de façon que la direction (x_1'', x_2'', x_3'') soit une arête double pour le cône formé par l'ensemble des nouveaux termes du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré. Dans cette transformation, les termes du $m^{\text{ème}}$ degré ne changent pas; par suite, les relations qui ont lieu entre les coefficients de ces termes subsisteront encore après le changement des axes.

La proposition énoncée souffre cependant des exceptions. Si, dans les équations (26.), on regarde a_1, a_2, a_3, comme des variables, on aura un système de trois plans. Dans le cas général que nous examinons, ces trois plans se coupent suivant une même droite; mais il arrivera que les trois plans (26.) sont parallèles, si (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; il pourra arriver aussi que les trois plans soient à l'infini, si l'arête (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête triple du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; ce sont les seuls cas exceptionnels.

12. Pour étudier d'une manière complète l'influence, sur l'ordre de la développable asymptote, des points doubles à l'infini de la surface U, il nous faudra donc examiner les cas suivants:

1er cas. *La direction asymptotique (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

D'après la première hypothèse, on aura

$$u_1'' = 0, \quad u_2'' = 0, \quad u_3'' = 0; \quad \text{les} \quad H_{rs} \gtrless 0;$$

et, d'après la remarque précédente, on pourra admettre que la deuxième hypothèse $v(x_1'', x_2'', x_3'')$ ou $v'' = 0$ entraine les trois relations

$$v_1'' = 0, \quad v_2'' = 0, \quad v_3'' = 0.$$

2me cas. *La direction asymptotique (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

La première hypothèse entraine les relations

$$u_1'' = 0, \quad u_2'' = 0, \quad u_3'' = 0, \quad \text{et} \quad H_{rs}'' = 0;$$

quant à la 2me hypothèse, elle ne peut pas être modifiée, et l'on a la seule relation

$$v'' = 0.$$

3me cas. *La direction asymptotique (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête triple du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

La 1ère hypothèse exige les conditions

$$u''_{r,s} = 0;$$

la 2me hypothèse ne donne lieu qu'à la seule relation

$$v'' = 0.$$

4me cas. *La direction asymptotique* (x''_1, x''_2, x''_3) *est une arête triple pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *et une arête double pour le cône* $v(x_1, x_2, x_3)$.

Cette double hypothèse entraine les relations

$$u''_{r,s} = 0; \quad \text{et} \quad v''_1 = 0, \quad v''_2 = 0, \quad v''_3 = 0.$$

Nous allons faire maintenant la discussion de ces différents cas.

IIIº. Discussion.

Premier cas:

13. *La direction asymptotique* (x''_1, x''_2, x''_3) *est une arête double du cône* $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, ce qui donne

$$(27.)_1 \quad u''_1 = 0, \quad u''_2 = 0, \quad u''_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad u'' = 0;$$

et *l'on peut supposer qu'elle est aussi une arête double du cône* $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, ce qui donne

$$(28.)_1 \quad v''_1 = 0, \quad v''_2 = 0, \quad v''_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad v'' = 0.$$

14. Pour déterminer l'ordre de la surface asymptote, nous chercherons le nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite arbitraire telle que

$$(29.) \quad \begin{cases} x_1 = \varrho a_1 + A_1 t, \\ x_2 = \varrho a_2 + A_2 t, \\ x_3 = \varrho a_3 + A_3 t. \end{cases}$$

En reprenant les raisonnements du nº. 8, nous voyons que le nombre des points de rencontre ou *l'ordre* de la surface asymptote est égal au nombre des génératrices communes aux deux cônes

$$(30.) \quad F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0,$$

$$(30^{\text{bis}}.) \quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Développons la fonction F et ses dérivées

$$(30.)\quad F = \begin{cases} a_1(x_2G_3-x_3G_2) + a_2(x_3G_1-x_1G_3) + a_3(x_1G_2-x_2G_1) \\ +a_1H(x_2A_3-x_3A_2)+a_2H(x_3A_1-x_1A_3)+a_3H(x_1A_2-x_2A_1). \end{cases}$$

Posant

$$(31.)\quad \begin{cases} E_1 = a_2G_3-a_3G_2, \\ E_2 = a_3G_1-a_1G_3, \\ E_3 = a_1G_2-a_2G_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = a_2A_3-a_3A_2, \\ \alpha_2 = a_3A_1-a_1A_3, \\ \alpha_3 = a_1A_2-a_2A_1; \end{cases}$$

on a:

$$(32.)\quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \begin{cases} a_1\left(x_2\frac{\partial G_3}{\partial x_i}-x_3\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)+a_2\left(x_3\frac{\partial G_1}{\partial x_i}-x_1\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)+a_3\left(x_1\frac{\partial G_2}{\partial x_i}-x_2\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\right) \\ +a_1(x_2A_3-x_3A_2)\frac{\partial H}{\partial x_i}+a_2(x_3A_1-x_1A_3)\frac{\partial H}{\partial x_i}+a_3(x_1A_2-x_2A_1)\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ -E_i-\alpha_iH; \end{cases}$$

$$(33.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j} = \begin{cases} a_1\left(x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}\right)+a_2\left(x_3\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i\partial x_j}-x_1\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}\right)+a_3\left(x_1\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}-x_2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i\partial x_j}\right) \\ +a_1(x_2A_3-x_3A_2)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}+a_2(x_3A_1-x_1A_3)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}+a_3(x_1A_2-x_2A_1)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j} \\ -\frac{\partial E_j}{\partial x_i}-\frac{\partial E_i}{\partial x_j}-\alpha_i\frac{\partial H}{\partial x_j}-\alpha_j\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{cases}$$

15. Nous allons d'abord écrire les relations particulières qui résultent des hypothèses (27), savoir:

$$(27.)_1\quad u_1^0 = 0,\quad u_2^0 = 0,\quad u_3^0 = 0.$$

On conclut immédiatement des identités (7.)

$$(34.)_1\quad H^0 = 0.$$

1°. Puisque les H_{rs} ne sont pas nuls, la comparaison des équations fournies par les identités (2.) et (6.), où l'on introduit les hypothèses (27.) et (34.), nous conduit aux relations

$$(35.)_1\quad H_{rs}^0 = \lambda_r x_s^0 = \lambda_s x_r^0;$$

et nous poserons

$$(35^{\text{bis}}.)_1\quad \frac{\lambda_r}{x_r^0} = \omega.$$

Les identités (8.) donnent visiblement

$$(36.)_1\quad \left(\frac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0.$$

2°. Eu égard aux relations (27.) et (36.), on déduit des identités (9.)

$$x_r^0\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = (m-1)\left[\sum^{n} u_{ni}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}\right]_0,$$

cette égalité aura lieu quelles que soient les valeurs respectives des nombres r, s, i, égales ou inégales. D'un autre côté, les identités (11.) donnent d'après (36.)

$$\left[\sum^{n} u_{ni}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}\right]_0 = -\left[\sum^{n}\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s} H_{rn}\right]_0;$$

on conclut de là

$$x_r^0\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = -(m-1)\left[\sum^{n}\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s} H_{rn}\right]_0.$$

Les relations (35.), (35bis.) et l'identité (3.) nous permettent de transformer le second membre de cette dernière égalité, lequel devient successivement

$$-(m-1)\lambda_r \sum^{n} x_n \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s}; \quad -(m-1)(m-2)\lambda_r u_{si};$$

et on a définitivement

$$(37.)_1 \qquad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = -(m-1)(m-2)\,\omega\, u_{si}^0.$$

3°. Eu égard aux relations (35.) et (36.), les identités (11.) donnent

$$\left(\sum^{n} u_{sn}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right)_0 + \lambda_r\left[\sum^{n} x_n \frac{\partial u_{sn}}{\partial x_i}\right] = 0;$$

puis, d'après l'identité (3.):

$$(38.)_1 \qquad \left[\sum^{n} u_{sn}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right]_0 + (m-2)\lambda_r u_{si}^0 = 0;$$

égalité qui a lieu aussi lorsque $s = r$.

Si, dans cette dernière égalité, on fait successivement $s = 1, 2, 3$, en laissant à i une valeur fixe, et que l'on compare les trois équations ainsi obtenues avec celles que fournit le groupe (2.) dans le cas actnel, on obtient les nouvelles relations

$$(39.)_1 \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_1}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_1}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_1}\right)_0}{x_3^0},\\
&\frac{\left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_2}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_2}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_2}\right)_0}{x_3^0},\\
&\frac{\left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_3}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_3}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_3}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_3^0}.
\end{aligned}\right.$$

16. Nous allons maintenant démontrer que la droite (x_1'', x_2'', x_3'') est une arête double pour les deux cônes F et u [n°. 14], et que les plans tangents suivant cette arête double sont les mêmes.

1°. D'après les relations (28.), les valeurs (15.) des G_r sont nulles, et l'on a

$$(40.)\qquad G_1''=0,\quad G_2''=0,\quad G_3''=0;$$

et comme H'' est aussi nul, on voit que l'arête (x_1'', x_2'', x_3'') appartient également au premier des cônes (30.), savoir au cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

2°. D'après les relations (40.), (34.) et (36.), l'expression (32.) des $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ne dépend plus que des binômes de la forme

$$\left(x_2\frac{\partial G_3}{\partial x_i}-x_3\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right);$$

or, eu égard aux hypothèses (28.), la valeur (20.) de ces binômes ne dépend plus que des quantités

$$(x_2 H_{3n}-x_3 H_{2n}),$$

quantités nulles, d'après les relations (35.). Donc

$$(41.)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x_1'', x_2'', x_3'') est aussi une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

3°. Les relations (28.) et (35.) nous donnent pour les valeurs (16.) des $\frac{\partial G_r}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial G_r}{\partial x_i}=\lambda_r\sum^n x_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i}=\lambda_r\sum^n x_n\frac{\partial v_i}{\partial x_n}=\lambda_r(m-2)v_i;$$

et, d'après (28.):

$$(42.)\qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

4°. Eu égard aux relations (40.), (42.), (36.), la valeur (33.) des $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ se réduit à

$$a_1\left(x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}\right)+a_1(x_2A_3-x_3A_2)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}$$
$$+a_2(\ldots)+\cdots$$

D'après l'égalité (37.), le second terme a pour valeur

$$-a_1(x_2''A_3-x_3''A_2)(m-1)(m-2)\omega.u_{ij}''.$$

La 1[ère] expression, dont la valeur est fournie par les formules (21.), se réduit,

en vertu des égalités (28.) et (35.), à

$$\overset{n}{\Sigma}\frac{\partial r_n}{\partial x_j}\left(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i}-x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)+\overset{n}{\Sigma}\frac{\partial r_n}{\partial x_i}\left(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_j}-x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_j}\right).$$

La réduction de ces sommes s'opère aisément à l'aide des relations (39.); et, si l'on tient compte des hypothèses (28.), on a définitivement

$$(43.)\qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = R u_{ij}^0,$$

en désignant par R la quantité suivante indépendante des indices i et j

$$-(m-1)(m-2)\omega[a_1(x_2^0 A_3-x_3^0 A_2)+a_2(x_3^0 A_1-x_1^0 A_3)+a_3(x_1^0 A_2-x_2^0 A_1)].$$

Or l'équation des plans tangents au cône F suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est

$$\mathrm{S}\, x_i x_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0;$$

cette équation devient, en y substituant les valeurs (43.):

$$x_1^2 u_{11}^0+x_2^2 u_{22}^0+x_3^2 u_{33}^0+2x_2x_3 u_{23}^0+2x_1x_3 u_{13}^0+2x_1x_2 u_{12}^0 = 0;$$

c'est précisément l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Comme conséquence de cette analyse du 1er cas, il résulte donc que *Les deux cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun six arêtes coincidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Deuxième cas.

17. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête de rebroussement du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; on doit donc avoir d'abord

$$(44.)_2 \qquad u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où } u^0 = 0,$$

puis

$$(45.)_2 \qquad H_{r_0}^0 = 0, \quad \text{d'où } H^0 = 0 \quad (45^{bis}.);$$

de plus cette arête appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$, et l'on ne peut pas supposer, en général, qu'elle en soit une arête double; on a donc la seule condition

$$(46.)\qquad v^0 = 0.$$

Nous allons chercher encore le nombre des arêtes communes aux deux cônes (30.) et (30bis.) et coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

18. Les relations établies dans le 1er cas ne sont plus applicables ici, car les identités (2.) et (6.) ne fournissent plus des systèmes d'équations distinctes.

1°. Les relations admises (45.), ou $H_{rs}=0$, entrainent comme conséquence immédiate

$$(47.)_2 \qquad u^0_{rs} = g_r g_s.$$

En effet, on peut toujours poser

$$u_{12}=g'_1 g'_2, \qquad u_{13}=g'_1 g'_3, \qquad u_{23}=k g'_2 g'_3;$$

en cherchant à vérifier les relations (45.), on conclut

$$u_{11}=\frac{g'^2_1}{k}, \qquad u_{22}=kg'^2_2, \qquad u_{33}=kg'^2_3;$$

or on peut encore poser

$$g'_1=g_1\sqrt{k}, \qquad g'_2=\frac{g_2}{\sqrt{k}}, \qquad g'_3=\frac{g_3}{\sqrt{k}},$$

g_1, g_2, g_3, étant de nouvelles indeterminées; on arrive ainsi aux valeurs (47.).

Les identités (2.) donnent alors

$$(48.)_2 \qquad x''_1 g_1+x''_2 g_2+x''_3 g_3 = 0;$$

et les identités (8.) conduisent à

$$(49.)_2 \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0.$$

En ayant égard aux relations (44.), (45.), (47.) et (49.), nous conclurons des identités (9.)

$$(50.)_2 \qquad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\right) = 0,$$

après avoir remarqué que les identités (11.) nous conduisent, d'après (45.), (47.) et (50.), à

$$(51.)_2 \qquad g_1\left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}\right)_0+g_2\left(\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i}\right)_0+g_3\left(\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

2°. En supposant $j=i$, les identités (12.) donnent, d'après (45.), (47.) et (49.);

$$\frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i} = -\tfrac{1}{2} g_s \sum^n g_n \frac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i^2},$$

en supprimant, pour un instant, l'indice 0. Posons

$$(52.)_2 \qquad g_1\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i^2}\right)_0+g_2\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i^2}\right)_0+g_3\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i^2}\right)_0 = -2g_i A_{ri};$$

l'égalité précédente devient alors

$$\left[\frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i}\right]_0 = g_s g_i A_{ri},$$

égalité qui a lieu aussi pour $s = r$. Faisons-y successivement $s = 1, 2, 3$, et résolvons les trois équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}$, on trouve par exemple

$$(\mathrm{I.})\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{31}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 \cdot \left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}\right)_0 = A_{ri} g_i \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ g_2 & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ g_3 & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0.$$

D'un autre côté, les identités (3.) deviennent, d'après (47.):

$$\left(x_1 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\right)_0 = (m-2) g_s g_i.$$

Faisons encore, dans cette égalité, $s = 1, 2, 3$ et résolvons les trois équations obtenues par rapport à x_1, x_2, x_3; on a, par exemple:

$$(\mathrm{II.})\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{31}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 \cdot x_1^0 = (m-2) g_i \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ g_2 & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ g_3 & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0.$$

Divisant membre à membre les égalités (I.) et (II.), nous conclurons une relation comprise dans le type général suivant:

$$(53.)_2 \qquad \left(\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{A_{ri}}{m-2} x_s^0.$$

Il résultera, en outre, de l'égalité $\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{sr}}{\partial x_i}$

$$(53^{\text{bis}}.)_3 \qquad \frac{A_{ri}}{x_r^0} = \frac{A_{si}}{x_s^0}.$$

La substitution de ces valeurs dans les identités (12.) nous donnera, en tenant compte des relations (45.), (47.), (53.) et (3.);

$$(54.)_2 \qquad g_1\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + g_2\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + g_3\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = -(A_{rj} g_i + A_{ri} g_j);$$

cette égalité donne l'égalité (52.) comme cas particulier.

3°. Si l'on combine successivement avec la relation (48.) les relations (52.) et (54.), et qu'après avoir attribué à i et j des valeurs spéciales 1, 2 ou 3, on élimine alternativement les quantités g_1, g_2, g_3, on sera conduit

après avoir posé:

$$(55.)_2 \quad \begin{cases} K^{ij}_{r,1} = x_2^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_3^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0, \\ K^{ij}_{r,2} = x_3^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_1^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0, \\ K^{ij}_{r,3} = x_1^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_2^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0; \end{cases}$$

au groupe des relations suivantes:

$$(56.)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{K^{11}_{r,1}}{g_1} = \dfrac{K^{11}_{r,2} + 2x_3^0 A_{r1}}{g_2} = \dfrac{K^{11}_{r,3} - 2x_2^0 A_{r1}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{22}_{r,1} - 2x_3^0 A_{r2}}{g_1} = \dfrac{K^{22}_{r,2}}{g_2} = \dfrac{K^{22}_{r,3} + 2x_1^0 A_{r2}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{33}_{r,1} + 2x_2^0 A_{r3}}{g_1} = \dfrac{K^{33}_{r,2} - 2x_1^0 A_{r3}}{g_2} = \dfrac{K^{33}_{r,3}}{g_3}; \end{cases}$$

$$(56^{bis}.)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{K^{23}_{r,1} + x_2^0 A_{r2} - x_3^0 A_{r3}}{g_1} = \dfrac{K^{23}_{r,2} - x_1^0 A_{r2}}{g_2} = \dfrac{K^{23}_{r,3} + x_1^0 A_{r3}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{31}_{r,1} + x_2^0 A_{r1}}{g_1} = \dfrac{K^{31}_{r,2} + x_3^0 A_{r3} - x_1^0 A_{r1}}{g_2} = \dfrac{K^{31}_{r,3} - x_2^0 A_{r3}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{12}_{r,1} - x_3^0 A_{r1}}{g_1} = \dfrac{K^{12}_{r,2} + x_3^0 A_{r2}}{g_2} = \dfrac{K^{12}_{r,3} + x_1^0 A_{r1} - x_2^0 A_{r2}}{g_3}. \end{cases}$$

En tenant compte des relations (53bis.), (54.) et des valeurs (55.), on vérifie facilement l'égalité

$$(57.)_2 \quad g_1 K^{ij}_{1,s} + g_2 K^{ij}_{2,s} + g_3 K^{ij}_{3,s} = 0.$$

4°. En ayant égard aux relations (44.), (45.), (47.), (49.), (50.), (51.), (52.), (54.) et à l'identité (3.), on déduira des identités (10.) les valeurs suivantes:

$$(58.)_2 \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i^3}\right)_0 = -(m-1)\dfrac{3g_i^2 A_{ii}}{x_1^3}, \\ \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i^2 \partial x_j}\right)_0 = -(m-1)\dfrac{g_i}{x_1^3}(2A_{ij}g_i + A_{ii}g_j), \\ \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right)_0 = -\dfrac{(m-1)}{x_1^3}(A_{11}g_2g_3 + A_{12}g_1g_3 + A_{13}g_1g_2). \end{cases}$$

5°. Si l'on élimine successivement les quantités g_1, g_2, g_3, entre les deux relations (48.) et (57.), on en conclut l'égalité des rapports

$$(59.)_2 \quad \frac{x_2^0 K^{ij}_{3,s} - x_3^0 K^{ij}_{2,s}}{g_1} = \frac{x_3^0 K^{ij}_{1,s} - x_1^0 K^{ij}_{3,s}}{g_2} = \frac{x_1^0 K^{ij}_{2,s} - x_2^0 K^{ij}_{1,s}}{g_3} = \omega^{ij}_s.$$

Nous déterminerons la valeur des rapports ω^{ij}_s à l'aide de l'identité (14.).

En tenant compte successivement des relations (45.), (49.), (50.), (53.), (55.), l'identité (14.) devient, en supposant, par exemple, $s=2$, $s_1=3$

$$(\text{l.})\qquad (m-2)\frac{\partial^2 H}{\partial u_{r,2}\partial u_{r_1 3}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} = \mathsf{S}(A_{ri}K^{ij}_{r_1,1}-A_{r_1 1}K^{ij}_{r,1}),$$

la somme S s'étendant aux combinaisons des trois indices i, j, k.

Si maintenant on donne à r et r_1 des valeurs particulières, et qu'on ait égard aux relations (53bis.), (58.), (47.) et à la définition (59.) des ω^{ij}_{s}, on trouvera pour les valeurs cherchées

$$(59^{\text{bis}}.)_2\qquad \omega^{ij}_{s} = -(m-1)(m-2)g_s.u^{ij}_{ij}.$$

19. Nous allons constater maintenant que la droite (x''_1, x''_2, x''_3) est une arête de rebroussement pour les deux cônes F et u, et que le plan tangent de rebroussement est le même pour tous deux.

1°. D'après les relations (45.), les formules (15.) donnent

$$(60.)\qquad G''_1=0,\quad G''_2=0,\quad G''_3=0;$$

et comme la quantité H est évidemment nulle, il en résulte pour la valeur (30.) de F

$$(61.)\qquad F'' = 0,$$

c. à. d. que l'arête (x''_1, x''_2, x''_3) appartient au cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

2°. Eu égard aux relations (45.) et (53.), la valeur (16.) des $\frac{\partial G_r}{\partial x_i}$ se réduit à

$$\left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{m-1}{m-2}A_{ri}v'';$$

et comme v'' est nul, d'après l'hypothèse (46.), il vient

$$(62.)\qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

En vertu des relations (45.), (49.), (60.) et (62.), les formules (32.) donnent

$$(63.)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x''_1, x''_2, x''_3) est une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

3°. Calculons enfin les $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ définies par les équations (33.).

D'après les relations (49.), (50.), et (62.) la valeur (33.) de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ se réduit à

$$\mathsf{S}\,a_1\left(x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}\right);$$

or, eu égard aux relations (45.), (53.) et (53bis.), l'équation (21.) nous donne

$$x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j} = \overset{n}{\Sigma} v_n\Big(x_2\frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i\partial x_j}\Big):$$

par suite, d'après les notations (55.),

$$\text{(I.)}\qquad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = a_1\overset{n}{\Sigma} v_n K^{ij}_{n,1}+a_2\overset{n}{\Sigma} v_n K^{ij}_{n,2}+a_3\overset{n}{\Sigma} v_n K^{ij}_{n,3}.$$

Il nous reste à déterminer les sommes qui se trouvent dans le second membre. Posons, pour un instant,

$$(1^\circ.)\qquad S^{ij}_r = \overset{n}{\Sigma} v^0_n K^{ij}_{n,r} = v^0_1 K^{ij}_{1,r}+v^0_2 K^{ij}_{2,r}+v^0_3 K^{ij}_{3,r};$$

on a, en outre, d'après (57.), (48.) et (46.):

$$(2^\circ.)\qquad 0 = g_1 K^{ij}_{1,r}+g_2 K^{ij}_{2,r}+g_2 K^{ij}_{3,r};$$

$$(3^\circ.)\qquad 0 = g_1 x^0_1+g_2 x^0_2+g_3 x^0_3;$$

$$(4^\circ.)\qquad 0 = v^0 = x^0_1 v^0_1+x^0_2 v^0_2+x^0_3 v^0_3.$$

Eliminant d'abord les x_i entre les équations (3°.) et (4°.), il vient

$$(5^\circ.)\qquad \frac{g_2 v^0_3-g_3 v^0_2}{x^0_1} = \frac{g_3 v^0_1-g_1 v^0_3}{x^0_2} = \frac{g_1 v^0_2-g_2 v^0_1}{x^0_3} = \theta;$$

puis éliminant les $K_{1,r}$ entre les équations (1°.) et (2°.), et tenant compte de l'égalité des rapports précédents, on trouve

$$g_1 S^{ij}_r = \theta(x^0_3 K^{ij}_{2,r}-x^0_2 K^{ij}_{3,r}).$$

Et enfin, d'après les relations (59.) et (59bis.), il vient définitivement

$$(64.)\qquad S^{ij}_r = v^0_1 K^{ij}_{1,r}+v^0_2 K^{ij}_{2,r}+v^0_3 K^{ij}_{3,r} = -\theta(m-1)(m-2)g_r\,.\,u^0_{ij}.$$

Nous aurons, par suite, pour la valeur (I.) de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$:

$$(65.)\qquad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = -\theta(m-1)(m-2)(a_1 g_1+a_2 g_2+a_3 g_3)\,.\,u^0_{ij},$$

θ étant une quantité dont la valeur est indépendante des indices i et j.

Or l'équation des plans tangents au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x^0_1, x^0_2, x^0_3) est

$$\mathsf{S}\, x_i x_j\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = 0;$$

cette équation devient, en y substituant les valeurs (65.):

$$x_1^2 u^0_{11}+x_2^2 u^0_{22}+x_3^2 u^0_{33}+2x_2x_3u^0_{23}+2x_3x_1u^0_{13}+2x_1x_2u^0_{12} = 0,$$

ou

$$(x_1g_1+x_2g_2+x_3g_3)^2 = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Comme conséquence de cette analyse, il résulte que, dans ce 2ième cas, *Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun six arêtes coïncidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).*

Troisième cas.

20. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$*; on doit donc avoir

$$(66.)_3 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et, *en outre, cette droite est une arête simple du cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$*; d'où la relation unique

$$(67.)_3 \qquad v^0 = 0.$$

21. 1°. Comme conséquence immédiate des hypothèses (66.), on a d'abord

$$(68.)_3 \qquad u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où } u^0 = 0;$$

$$(68^{\text{bis}}.)_3 \qquad H^0 = 0; \quad H_{rs}^0 = 0.$$

Les identités (8.) et (9.) donnent ensuite

$$(69.)_3 \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\right)_0 = 0. \end{cases}$$

Les quantités H_{rs} étant des fonctions homogènes et du second degré par rapport aux u_{rs}, on a évidemment

$$(70.)_3 \qquad \left(\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_t}\right)_0 = 0;$$

et les identités (10.) donnent alors

$$(71.)_3 \qquad \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t}\right)_0 = 0.$$

2°. Différentiant encore une fois les identités (12.), et introduisant les hypothèses actuelles, nous trouverons

$$(\text{I}) \qquad \sum^{n} \frac{\partial u_{sn}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_j \partial x_k} + \sum^{n} \frac{\partial u_{sn}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Faisons d'abord $k = j = i$, puis donnons à s les valeurs 1, 2, 3; les trois équations ainsi obtenues, comparées avec celles que fournit la relation

$$x_1 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i} = 0$$

lorsqu'on y donne aussi à s les valeurs 1, 2, 3, nous conduiront aux relations

$$(72.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_3^0}.$$

Eu égard à ces dernières relations, l'égalité (I) nous conduira, à l'aide d'un calcul semblable au précédent, aux équations

$$(72^{\text{bis}}.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_3^0}.$$

22. Nous allons constater maintenant que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est aussi une arête triple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

D'après les relations (68.) et (70.), les formules (15.) et (16.) donnent d'abord

$$(73.) \qquad G_r^0 = 0, \quad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

et, par suite des relations (68.), (70.), (72.) et (67.), les formules (17.) donnent

$$(74.) \qquad \left(\frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

Les équations (30.), (32.) et (33.) donnent alors immédiatement

$$(75.) \qquad F^0 = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

En poussant plus loin les calculs on constaterait que les $\partial^3 F$ ne sont ni nuls, ni proportionnels aux $\partial^3 u$. L'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc triple pour les deux cônes F et u; par conséquent *les deux cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun* ***neuf*** *arêtes coïncidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Quatrième cas.

23. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête triple pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(76.)_4 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et *est, en même temps, une arête double pour le cône* $v(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(77.)_4 \qquad v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad v_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad v^0 = 0.$$

24. Les relations des n[os] 21 et 22 sont applicables à ce cas; les formules (18.) nous donnent en outre, d'après (77.):

$$(78.)_4 \qquad \left(\frac{\partial^3 G_r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

et on conclut immédiatement de l'identité (33.), après l'avoir différentiée,

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête quadruple pour le cône F. Donc

Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun douze arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

IVº. Conclusion générale.

25. Nous venons donc de démontrer que, lorsque la surface U possède un point double à l'infini, les deux cônes (30.) et (30 bis.)

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ont en commun, en général, *six* arêtes coincidant avec la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) correspondant au point double. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, les deux cônes auront en commun *neuf* ou *douze* arêtes coincidant avec l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0), suivant que cette droite est une arête simple ou une arête double du cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$. On sait d'ailleurs que les solutions communes à ces deux cônes déterminent tous les points en lesquels la surface asymptote est rencontrée par une droite quelconque, et font, par suite, connaître *l'ordre* de cette développable.

Or, pour $(x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0)$, les équations (10.) §. I de la génératrice (δ) correspondant à cette direction asymptotique se réduisent à des identités, puisque les quantités H et G, sont nulles; il n'y a plus, en effet, de plan asymptote, il n'y a plus de génératrice (δ) correspondant à la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Par conséquent, le nombre des génératrices (δ), rencontrées par la droite arbitrairement choisie, sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$, $u(x_1, x_2, x_3)$ et distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); c. à. d. égal à

$$[m(3m-5)-6], \text{ ou } [m(3m-5)-9], \text{ ou } [m(3m-5)-12]$$

suivant que la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0), qui détermine le point double, est une arête double du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et une arête simple pour le cône $v(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône u et une arête double pour le cône v.

Donc

26. *Lorsque la surface U a un point double à l'infini, l'ordre*

$$N = m(3m-5)$$

de la surface asymptote est diminué, en général, de six unités. Lorsque la direction asymptotique, correspondant au point double, est une arête triple du cône φ_m, *la diminution sera de neuf ou de douze unités suivant que cette direction sera une arête simple ou une arête double pour le cône* φ_{m-1}.

Ces derniers cas se présenteront respectivement lorsque le cylindre asymptote, correspondant au point double, se réduira à deux plans dont un à l'infini, ou à deux plans à l'infini [n[os] 25 et 26, 1[ère] partie].

---

§. III.

Recherche des directions asymptotiques de la surface asymptote.

27. Pour les recherches qui nous restent à faire, nous nous placerons dans le cas général où la surface proposée U n'a pas de points multiples à l'infini.

Nous compléterons d'abord l'étude précédente en cherchant à déterminer l'influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques sur l'ordre de la surface asymptote, en supposant toujours que ces arêtes doubles ne correspondent pas à des points doubles à l'infini sur la surface U, c. à. d. que cette génératrice du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.

I°. Influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques.

28. Considérons une arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) que nous supposerons double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$(79.)\qquad u_1^0 = 0,\quad u_2^0 = 0,\quad u_3^0 = 0,\quad \text{d'où}\quad u^0 = 0;$$

et admettons, en outre, que cette arête n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$v^0 \gtrless 0.$$

Nous aurons à examiner deux cas: la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, ou elle en est une arête de rebroussement.

Premier cas.

29. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$, c. à. d. que

$$(80.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et} \qquad\qquad H_{rs}^0 \gtrless 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 15. sont applicables à ce cas. D'après (35.), les valeurs (15.) des G_r sont

$$(81.)\quad (G_r)_0 = \lambda_r(m-1)v^0;$$

et, eu égard à ces valeurs et à la relation (34.), l'équation du cône (30.) devient

$$F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & \lambda_1 \\ a_2 & x_2^0 & \lambda_2 \\ a_3 & x_3^0 & \lambda_3 \end{vmatrix} (m-1)v^0 = 0,$$

$$\text{car} \quad \lambda_r = \omega x_r^0;$$

donc le cône $F(x_1, x_2, x_3)$ passe par l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Nous calculerons plus loin les $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$ et nous constaterons que leur valeurs sont différentes de zéro. Ainsi

Les cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun deux arêtes coincidant avec l'arête* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Deuxième cas.

30. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double de rebroussement pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(82.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et } H_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s; \text{ d'où } H^0 = 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 18 sont applicables à ce cas. D'après (45.), les valeurs des G_r sont

$$(83.)\quad G_r = 0;$$

il en résulte immédiatement $F^0 = 0$. On a, en outre, (20.)

$$(84.)\quad \begin{cases} \left(x_2\frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 = \left[\sum^n v_n\left(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)\right]_0 \\ \text{d'après (53.)} \qquad = \left[\sum^n \frac{v_n A_{ni}}{m-2}(x_2^0 x_3^0 - x_3^0 x_2^0)\right] = 0; \end{cases}$$

alors, eu égard aux relations (49.) et (84.), la formule (32.) donne

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

Donc, la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Nous calculerons plus loin les $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0$ et nous constaterons que leurs valeurs sont différentes de zéro. Ainsi *les cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun quatre arêtes coïncidant avec la droite* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Conclusion.

31. Dans l'hypothèse actuelle $H^0 = 0$; par suite, les équations (10.) §. 1 de la génératrice (δ) se réduisent à la seule équation

$$t = 0,$$

laquelle représente le plan à l'infini; c. à. d. que le point d'intersection (correspondant à la solution x_1^0, x_2^0, x_3^0) de la droite arbitrairement choisie avec la surface asymptote se trouve sur une droite à l'infini. Donc une droite *quelconque* rencontre la surface asymptote en *deux* points ou *quatre* points coïncidants et situés sur le plan à l'infini, suivant que la direction asymptotique considérée est une arête double ou une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface asymptote. Il reste donc

$$[m(3m-5)-2] \quad \text{ou} \quad [m(3m-5)-4]$$

génératrices proprement dites rencontrées par une droite arbitrairement choisie.

Ainsi:

Lorsque le cône (u ou φ_m) possède une arête double ou une arête de rebroussement ne correspondant pas à un point double à l'infini de la surface U, l'ordre de la développable asymptote se trouve diminué de deux ou quatre unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

II°. Recherche des directions asymptotiques.

32. Les points à l'infini sur la surface asymptote ne peuvent provenir que des points situés à l'infini sur ses génératrices à distance finie, ou des points sur les génératrices à l'infini, lesquelles correspondent aux arêtes d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou à ses arêtes doubles, car dans ce second cas le plan asymptote est à l'infini.

Les génératrices du cône des directions asymptotiques de la surface proposée U fournissent un *premier système* de directions asymptotiques pour

la surface asymptote; car à une arête du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ correspond une génératrice parallèle de la surface asymptote et une seule.

Mais l'étude des arêtes d'inflexion et des arêtes doubles du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m va nous permettre de constater l'existence d'autres systèmes de directions asymptotiques pour la surface asymptote.

Premier cas. Arêtes d'inflexion.

33. Supposons que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, de sorte que

$$(85.)\quad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \quad \text{et} \quad H^0 = 0.$$

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une *droite quelconque parallèle à l'arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0), savoir (A_1, A_2, A_3 étant des constantes arbitraires)

$$(86.)\quad \frac{x_1 - A_1 t}{x_1^0} = \frac{x_2 - A_2 t}{x_2^0} = \frac{x_3 - A_3 t}{x_3^0}.$$

Le nombre des génératrices (δ) rencontrées par cette droite sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$(87.)\quad F_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1^0 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ x_2^0 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ x_3^0 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad (87^{\text{bis}}.)\quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Nous allons donner de suite les développements de la fonction F et de ses dérivées, développements qui nous seront utiles pour ce cas et les suivants. On a d'abord

$$(87.)\quad F_1 = (x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)(G_1 + A_1 H) + (x_3^0 x_1 - x_1^0 x_3)(G_2 + A_2 H) + (x_1^0 x_2 - x_2^0 x_1)(G_3 + A_3 H).$$

Posons

$$(88.)\quad \begin{cases} x_2^0 G_3 - x_3^0 G_2 = E_1, \\ x_3^0 G_1 - x_1^0 G_3 = E_2, \\ x_1^0 G_2 - x_2^0 G_1 = E_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = x_2^0 A_3 - x_3^0 A_2, \\ \beta_2 = x_3^0 A_1 - x_1^0 A_3, \\ \beta_3 = x_1^0 A_2 - x_2^0 A_1; \end{cases}$$

on aura alors

$$(89.)\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \mathsf{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i} + A_1 \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) - E_i - \beta_i H,$$

puis:

$$(90.)\quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} = \left\{ \begin{matrix} \mathsf{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial x_i \partial x_j} + A_1 \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ -\dfrac{\partial E_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial E_i}{\partial x_j} - \beta_j \dfrac{\partial H}{\partial x_i} - \beta_i \dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{matrix} \right\};$$

et enfin

$$(91.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 F_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \\ \mathfrak{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\dfrac{\partial^3 G_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + A_1 \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right) \\ -\dfrac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 E_j}{\partial x_i \partial x_k} - \beta_k \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \beta_i \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} - \beta_j \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}. \end{cases}$$

34. Revenons à la question. Il est d'abord visible que l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) appartient au cône (87.) $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous allons démontrer, en outre, que les deux cônes F_1 et u se touchent suivant cette génératrice commune.

En effet, faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, et ayant égard aux relations (85.), les équations (88.) et (89.) donnent, par exemple,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 = x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0.$$

Or l'identité (12.) §. I. et la 1ère des relations (85.) donnent

$$\begin{cases} u_1^0 G_1^0 + u_2^0 G_2^0 + u_3^0 G_3^0 = 0, \\ u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination successive de u_1^0, u_2^0, u_3^0 ces deux égalités conduisent à

$$\frac{x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0}{u_1^0} = \frac{x_3^0 G_1^0 - x_1^0 G_3^0}{u_2^0} = \frac{x_1^0 G_2^0 - x_2^0 G_1^0}{u_3^0}.$$

D'après ces dernières relations et les valeurs ci-dessus des $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0$, on voit que l'équation

$$x_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)_0 + x_3\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)_0 = 0$$

du plan tangent au cône $F_1(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) devient

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 = 0;$$

c'est précisément l'équation du plan tangent au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant cette même arête.

Les deux cônes (87.) ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) et se touchent suivant cette arête; par suite, ils n'auront plus en commun que $[m(3m-5)-2]$ autres arêtes distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); mais, à une arête d'inflexion correspond, en général, pour la surface asymptote une ***droite à l'infini*** dans le plan asymptote parallèle au plan d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$.

Par conséquent: *Une droite quelconque parallèle à une arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône des directions asymptotiques, c. à d. passant par le point à l'infini*

$$(1.)\qquad \frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3}{x_3^0}, \qquad t = 0,$$

ne rencontre plus la surface asymptote qu'en $[m(3m-5)-2]$ *points distincts du point où elle rencontre la génératrice à l'infini; par suite, elle rencontre cette génératrice à l'infini en deux points coincidents; donc le point I à l'infini est un* **point double** *de la surface asymptote.*

Nous ferons plus loin quelques remarques relatives au cas où la génératrice (δ), correspondant à une arête d'inflexion, est à distance finie.

35. Imaginons maintenant une droite quelconque

$$\frac{x_1 - A_1 t}{a_1} = \frac{x_2 - A_2 t}{a_2} = \frac{x_3 - A_3 t}{a_3},$$

située dans le plan asymptote

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0,$$

qui correspond à l'arête d'inflexion (x_1^0, x_2^0, x_3^0); de sorte qu'on a les relations

$$(92.)\qquad \begin{cases} u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \quad H^0 = 0; \\ a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 = 0; \\ A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0 + A_3 u_3^0 + v^0 = 0. \end{cases}$$

Le nombre des génératrices de la surface asymptote rencontrées par la droite en question sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

équations dont la forme est identique à cello des équations (30.).

Ces deux cônes ont en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); car si, après avoir remplacé x_1, x_2, x_3 par x_1^0, x_2^0, x_3^0 dans l'équation du cône F, on multiplie les colonnes du déterminant respectivement par u_1^0, u_2^0, u_3^0, et qu'on les ajoute en ayant égard aux relations (12.) §. 1. et (92.), il vient

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & G_1^0 + A_1 H^0 \\ a_2 & x_2^0 & G_2^0 + A_2 H^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

quantité évidemment nulle.

Cherchons maintenant le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0). L'équation (32.) donne, en y supposant $x_i = x_i^0$ et en tenant compte des premières relations (92.),

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = \\ \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)_0 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0 (a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 (a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0) + \\ (a_3 G_2^0 - a_2 G_3^0) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0 [A_1(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + A_2(a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + A_3(a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0)]. \end{cases}$$

Or, des égalités (92.)

$$\begin{cases} a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 = 0, \\ x_1^0 u_1^0 + x_2^0 u_2^0 + x_3^0 u_3^0 = u^0 = 0, \end{cases}$$

on conclut, en éliminant alternativement u_1^0, u_2^0, u_3^0:

$$\text{(93.)} \quad \begin{cases} \frac{a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0}{u_1^0} = \frac{a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0}{u_2^0} = \frac{a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0}{u_3^0} = \\ \frac{A_1(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + A_2(a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + A_3(a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0)}{A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0 + A_3 u_3^0} = g. \end{cases}$$

D'après cela, eu égard à la 3[ème] des relations (92.), la valeur de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$ devient

$$\text{(94.)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = (a_3 G_2^0 - a_2 G_3^0) + g\left[u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 - v^0 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0\right].$$

Mais les 1[ères] des relations (92.) et l'identité (12.) §. I. donnent encore

$$\begin{cases} u_1^0 G_1^0 + u_2^0 G_2^0 + u_3^0 G_3^0 = 0, \\ u_1^0 a_1 + u_2^0 a_2 + u_3^0 a_3 = 0; \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$\text{(95.)} \quad \frac{a_2 G_3^0 - a_3 G_2^0}{u_1^0} = \frac{a_3 G_1^0 - a_1 G_3^0}{u_2^0} = \frac{a_1 G_2^0 - a_2 G_1^0}{u_3^0} = g'.$$

D'un autre côté, si, dans les équations (16.), on fait $r = 1, 2, 3$, puis $x_i = x_i^0$ qu'on ajoute après avoir multiplié respectivement par u_1^0, u_2^0, u_3^0, en tenant compte des identités (7.) et des 1[ères] relations (92.), on trouve

$$u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 = \left[\sum^{n} v_n \left(u_1 \frac{\partial H_{n1}}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial H_{n2}}{\partial x_i} + u_3 \frac{\partial H_{n3}}{\partial x_i}\right)\right]_0;$$

égalité qui, d'après les identités (8.) et les 1[ères] des relations (92.), devient:

$$u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{1}{m-1} \left(\sum^{n} v_n x_n \frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_0,$$

ou enfin

$$(96.)\qquad u_1^0\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)_0+u_2^0\left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0+u_3^0\left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 = v^0\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0.$$

En vertu des relations (96.) et (95.), la valeur (94.) de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$ sera en définitive

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = g'.u_1^0.$$

D'après cela, le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sera

$$x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0 = 0;$$

les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ se touchent donc suivant cette arête; par conséquent, ils n'auront plus en commun que $[m(3m-5)-2]$ autres arêtes.

De là nous concluons que

Une droite, dirigée d'une manière quelconque dans le plan asymptote

$$(P)\qquad x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0+tv^0 = 0$$

correspondant à une arête d'inflexion du cône des directions asymptotiques, rencontre la surface asymptote en deux points coincidents sur la droite à l'infini située dans le plan (P); le plan (P) touche donc la développable asymptote tout le long de la droite à l'infini

$$x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0+tv^0=0,\quad t=0.$$

J'ajoute que *cette droite à l'infini n'est pas, en général, une droite double de la surface asymptote.*

Car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'une droite quelconque *parallèle* au plan (P) (et non pas seulement située dans le plan P) rencontrât la surface en deux points coincidents. Or, dans cette hypothèse, la 3ème des relations (92.) n'aurait plus lieu; et, eu égard aux relations (93.) et (95.), la valeur (I.) de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$ prendrait la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = g'u_1^0+g\left[v^0\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0+\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0(u_1^0A_1+u_2^0A_2+u_3^0A_3)\right].$$

Les constantes A_1, A_2, A_3 étant complètement arbitraires, le second membre ne peut pas se réduire à son premier terme, puisque les u, ne sont pas nuls.

36. Remarque. Dans une analyse précédente nos 29., 30. et 31. nous avons admis, pour tirer nos conclusions, que la génératrice (δ) de la surface asymptote, correspondant à une arête d'inflexion, se *trouvait à l'infini;* c'est, en effet, le cas général. Mais il peut arriver, dans des circonstances

tout-à-fait particulières, que la génératrice (δ), tout en restant parallèle à la direction asymptotique considerée (x_1'', x_2'', x_3) et dans le plan asymptote (P) correspondant à cette direction, se *trouve à distance finie*.

Dans le cas général, nous avons pu conclure que le plan (P) était tangent à la surface asymptote tout le long d'une droite à l'infini située dans ce plan; et, par suite, *une droite quelconque parallèle à ce plan sera une direction asymptotique de la surface asymptote,* puisque cette droite passe par un point à l'infini situé sur la surface asymptote.

Mais, dans le cas exceptionnel où la génératrice (δ) est à distance finie, le plan (P) ne touche plus la surface asymptote qu'en point à l'infini situé sur la génératrice (δ); et, par suite, il n'y a pas d'autre direction asymptotique que l'arête d'inflexion correspondante (x_1'', x_2'', x_3'').

Si nous considérons les équations (10.) §. I. d'une génératrice (δ) de la surface asymptote,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{H_0 x_1 + G_1^0 t}{x_1^0} = \dfrac{H_0 x_2 + G_2^0 t}{x_2^0} = \dfrac{H_0 x_3 + G_3^0 t}{x_3^0}, \qquad u^0 = 0, \\ x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0; \end{array} \right.$$

on voit que, pour une solution (x_1'', x_2'', x_3'') du système

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

les équations précédentes donneront une droite à l'infini, tant qu'une des quantités x_1'', x_2'', x_3'' ne sera pas nulle.

Si l'on suppose, par exemple, $x_3''=0$, les équations précédentes donneraient une droite à distance finie, si les fonctions H, G_1, G_2, G_3 étaient de la forme

$$H = H' x_3, \quad G_1 = G_1' x_3, \quad G_2 = G_2' x_3, \quad G_3 = G_3' x_3;$$

et alors, aux arêtes d'inflexion fournies par les équations

$$x_3 = 0, \qquad u(x_1, x_2, 0) = 0,$$

correspondraient, sur la surface asymptote, les m génératrices à distance finie

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0' x_3 + G_3'^0 t = 0, \\ x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0; \end{array} \right.$$

équations dans lesquelles l'indice 0 indique la substitution des valeurs $x_1 = x_1''$, $x_2 = x_2''$, $x_3 = 0$.

Deuxième cas. Arêtes doubles.

37. Nous allons étudier, au même point de vue, les arêtes doubles du cône $u(x_1, x_2, x_3)$. Remarquons néanmoins que la présence des arêtes doubles est un fait particulier, elle n'a pas lieu dans le cas général.

Supposons que (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; les relations du n°. 15 seront applicables à ce cas.

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une droite *quelconque* parallèle à l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); le nombre des points d'intersection sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes (87.) c. à. d. F_1 et u.

L'équation (87.) est évidemment vérifiée lorsqu'on y suppose $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$; les deux cônes ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Eu égard aux relations (35.), les valeurs (15.) des G_r prennent la forme

$$(97.) \qquad G_r = \lambda_r(m-1)v^0, \quad \text{et} \quad \lambda_r = \omega x_r^0.$$

Par suite, les E_i (88.) sont nuls; et alors d'après (34.), les formules (89.) donnent

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) = 0;$$

donc l'arête considérée est aussi double pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

En vertu des relations (36.), les valeurs (90.) des $\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ (pour $x_i = x_i^0$) se reduisent à

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = -\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0.$$

Or, d'après (35.), les valeurs (16.) deviennent

$$(97^{\text{bis}}.) \qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = (m-2)\lambda_r v_i^0 + \left(\sum^n v_n \frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right)_0.$$

On aura donc, par exemple, en se rappelant que $\lambda_r = \omega x_r^0$,

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_i}\right)_0 = x_2^0\left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 - x_3^0\left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 = \sum^n v_n^0\left[x_2^0\left(\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i}\right)_0 - x_3^0\left(\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)_0\right].$$

Si maintenant, on tient compte des relations (39.), on conclura de la:

$$(98.) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial E_i}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial E_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 = 0; \end{cases}$$

ainsi

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

L'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc une arête triple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$; elle est, en même temps, une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$. Par conséquent

Les deux cônes (87.) F_1 *et* u *ont en commun six arêtes coincidant avec l'arête* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

38. D'après les calculs faits dans le n°. 29, on a conclu qu'une *droite tout-à-fait arbitraire* rencontrait la surface asymptote en deux points à l'infini, et, par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface; c. à. d. que l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de deux unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

Or, il résulte du calcul précédent qu'une *droite quelconque parallèle à l'arête double* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) rencontre la surface asymptote en *six* points à l'infini; et, si l'on fait abstraction du plan à l'infini qui donne *deux* points pour une droite quelconque, on en conclut que

Une droite quelconque parallèle à l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *rencontre la surface asymptote en quatre points coincidents à l'infini; le point à l'infini correspondant est donc un point quadruple pour la surface asymptote.*

39. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, nous avons vu n°. 29 que, si l'on cherche les intersections de la surface asymptote avec *une droite tout-à-fait arbitraire,* les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ (30.) ont en commun deux arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0); car cette droite est une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et simple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3)$. Nous allons maintenant étudier le cas où *la droite est parallèle à l'un des plans tangents* au cône $u(x_1, x_2, x_3)$.

Nous compléterons d'abord l'analyse du n°. 29, en calculant, pour ce cas, les valeurs des $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ (32.).

D'après les valeurs (96.) et (97.), et la relation $\lambda_r = \omega x_r^0$, on a, par exemple,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = \mathfrak{S}\, a_1 \Big[\sum v_n \Big(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_1}\Big)\Big]_0 - (m-1)\omega v^0 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0);$$

et, si l'on a égard aux relations (39.), on trouvera, après quelques réductions faciles:

$$(99.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_1 x_3^0 - a_3 x_1^0), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_2 x_1^0 - a_1 x_2^0). \end{cases}$$

Considérons maintenant l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0), cette équation est

$$(Q) \qquad x_1^2 u_{11}^0 + x_2^2 u_{22}^0 + x_3^2 u_{33}^0 + 2x_2 x_3 u_{23}^0 + 2x_3 x_1 u_{31}^0 + 2x_1 x_2 u_{12}^0 = 0.$$

L'équation du plan tangent au cône F ou (30.) suivant cette même arête est

$$x_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 + x_3\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0 = 0$$

ou, d'après les valeurs (99.):

$$(T) \qquad x_1(a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0) + x_2(a_1 x_3^0 - a_3 x_1^0) + x_3(a_2 x_1^0 - a_1 x_2^0) = 0.$$

Or, si l'on suppose la droite (29.) parallèle à un des plans Q, le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) se confondra avec ce plan Q.

En effet, eu égard aux relations (35.), l'équation des plans Q peut s'écrire

$$(u_{11}^0 x_1 + u_{12}^0 x_2 + u_{13}^0 x_3)^2 + \omega(x_3^0 x_2 - x_2^0 x_3)^2 = 0.$$

Considérons, par exemple, le plan

$$(Q'.) \qquad u_{11}^0 x_1 + (u_{12}^0 + x_3^0\sqrt{-\omega})x_2 + (u_{13}^0 - x_2^0\sqrt{-\omega})x_3 = 0;$$

et supposons que la droite de direction (a_1, a_2, a_3) soit parallèle à ce plan; on aura

$$a_1 u_{11}^0 + a_2(u_{12}^0 + x_3^0\sqrt{-\omega}) + a_3(u_{13}^0 - x_2^0\sqrt{-\omega}) = 0;$$

on a, en outre,

$$x_1^0 u_{11}^0 + x_2^0 u_{12}^0 + x_3^0 u_{13}^0 = u_1^0 = 0,$$

puisque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double.

Ces deux dernières égalités pourront s'écrire:

$$\begin{cases} a_1 u_{11}^0 + a_2 u_{12}^0 + a_3 u_{13}^0 = \sqrt{-\omega}(a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0), \\ x_1^0 u_{11}^0 + x_2^0 u_{12}^0 + x_3^0 u_{13}^0 = 0. \end{cases}$$

Eliminant successivement u_{12}^0, u_{13}^0, on en conclut

$$\begin{cases} \dfrac{u_{12}^0 - x_3^0\sqrt{-\omega}}{u_{11}^0} = \dfrac{a_2 x_1^0 - a_1 x_2^0}{a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0}, \\ \dfrac{u_{13}^0 + x_2^0\sqrt{-\omega}}{u_{11}^0} = \dfrac{a_1 x_3^0 - a_3 x_1^0}{a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0}. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation du plan (Q') conduit précisément à l'équation du plan (T).

Donc le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ se confond avec un des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Par

conséquent, pour une droite quelconque (a_1, a_2, a_3) parallèle à l'un des plans Q, ces deux cônes ont au moins en commun trois arêtes coincidant avec l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Delà nous concluons que:

Une droite quelconque, parallèle à l'un des plans tangents suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0), rencontre la surface asymptote au moins en un point à l'infini, si l'on fait abstraction des deux points situés sur le plan à l'infini qui appartient à la surface.

Donc, *lorsque le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ou* φ_m *possède une arête double, les droites parallèles aux plans tangents à ce cône suivant l'arête double sont des directions asymptotiques de la surface asymptote; cette surface doit, par suite, contenir à l'infini deux droites respectivement situées dans des plans parallèles aux plans tangents suivant l'arête double.*

Troisième cas. Arêtes de rebroussement.

40. Supposons maintenant que (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête double de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; les relations du n°. 18 sont applicables à ce cas.

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une droite *quelconque* parallèle à l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); le nombre des points d'intersection sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes (87.) c. à. d. F_1 et u.

L'équation (87.) est évidemment vérifiée lorsqu'on y suppose $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$; les deux cônes ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

En tenant compte des relations (45.), (53.), (53bis.) les formules (15.) et (16.) donnent

$$(100.)\qquad \begin{cases} G_r^0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = \dfrac{m-1}{m-2} A_{ri} v^0. \end{cases}$$

On conclut alors des équations (87.), (88.), (89.), en y introduisant les hypothèses $x_i = x_i^0$,

$$F_1^0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

donc l'arête considérée est aussi double pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Eu égard aux relations (100.), (49.) et (53bis.) les équations (90.) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

La génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc une arête triple pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Enfin, dans l'hypothèse actuelle, la valeur (91.) de $\partial^3 F_1$ se réduit à

$$\left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0;$$

et, en faisant usago des notations (55.), on tronve facilement:

$$(101.) \qquad \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = -[\overset{n}{\Sigma} v_n (K^{jk}_{n,i} + K^{ik}_{n,j} + K^{ij}_{n,k})]_0.$$

D'après cette valeur, l'équation des trois plans tangents au cône $F_1(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête triple (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sera

$$(102.) \qquad \mathrm{S}\, x_i x_j x_k \left[\overset{n}{\Sigma} v_n \left(K^{jk}_{n,i} + K^{ik}_{n,j} + K^{ij}_{n,k}\right)\right]_0 = 0.$$

A l'aide des relations établies dans le n°. 18, on pent arriver à transformer le premier membre de cette équation et à mettre en évidence le factour

$$(x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3)^2,$$

lequel, égalé à zéro, donne précisément les deux plans tangents confondus au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0). On peut aussi vérifier le fait, et cela très-rapidement, en prenant l'arête de rebronssement pour un des axes de coordonnées et le plan tangent de rebroussement pour un des plans coordonnés; je supprimerai les détails de cette vérification.

Donc l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est triple pour le cône F_1 et double pour le cône u; en outre, deux des plans tangents au cône F_1 coincident avec les deux plans tangents au cône u; nous conclurons de là que: *Les deux cônes* (87.) *F_1 et u ont en commun* ***huit*** *arêtes coincidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

41. D'après les calculs faits dans le n°. 30, on a conclu qu'une *droite tout-à-fait arbitraire* rencontrait la surface asymptote en quatro points à l'infini; et, par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface; c. à. d. que l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de quatre unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

Or, il résulte dn calcnl précédent qu'une *droite quelconque parallèle à l'arête de rebroussement* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) rencontro la surface asymptote en *huit* points à l'infini; et, si l'on fait abstraction du plan à l'infini qui donne *quatre* points pour uno droite quelconque, on en conclut que

Une droite quelconque parallèle à l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0) du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ rencontre la surface asymptote en quatre points coincidents à l'infini; le point à l'infini correspondant est donc un point quadruple pour la surface asymptote.

42. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, nous avons vu [n°. 30] que, si l'on cherche les intersections de la surface par *une droite tout-à-fait arbitraire*, les deux cônes (30.) $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun quatre arêtes coïncidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0), car cette droite est une arête double pour les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$. Nous allons maintenant étudier le cas où *la droite est parallèle au plan de rebroussement* du cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous compléterons d'abord l'analyse du n°. 30 en calculant, pour ce cas, les valeurs des $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ (33.).

D'après les relations (49.), (50.), (21.), (45.), (53.), (53bis.) et (55.), les équations (33.) donnent

$$(103.)\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = a_1\Big(\sum^{n} v_n K_{n,1}^{ij}\Big)_0 + a_2\Big(\sum^{n} v_n K_{n,2}^{ij}\Big)_0 + a_3\Big(\sum^{n} v_n K_{n,3}^{ij}\Big)_0 - \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0.$$

Représentons respectivement par M_r^{11}, M_r^{22}, M_r^{33}, M_r^{23}, M_r^{31}, M_r^{12}, les valeurs des rapports égaux dans les relations (56.) et (56bis.); puis remplaçons les $K_{r,s}$ par leurs valeurs exprimées à l'aide des M_r. Pour calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$, par exemple, remarquons qu'on a d'après cette nouvelle notation

$$\begin{cases} K_{n,1}^{11} = M_n^{11} g_1, \\ K_{n,2}^{11} = M_n^{11} g_2 - 2x_3^0 A_{n1}, \\ K_{n,3}^{11} = M_n^{11} g_3 + 2x_2^0 A_{n1}; \end{cases}$$

on a en outre, d'après (31.), (16.), (53.) et (53bis.)

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}\right)_0 = a_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 - a_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0 = \frac{m-1}{m-2} v^0 \frac{A_{11}}{x_1^0}(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0).$$

La substitution de ces valeurs dans l'égalité (103.), ou l'on fera $i=j$, conduit à

$$(104.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \sum^{n} v_n^0 M_n^{11} - 2\,\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{11}}{x_1^0}(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0); \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \sum^{n} v_n^0 M_n^{22} - 2\,\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{22}}{x_2^0}(a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0); \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \sum^{n} v_n^0 M_n^{33} - 2\,\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{33}}{x_3^0}(a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0); \end{cases}$$

les deux autres valeurs s'obtenant par un calcul semblable.

En se servant des mêmes relations et des mêmes formules on trouvera encore:

$$
(104^{\text{bis}}.)\quad
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)_0 = \\
(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{23} - \dfrac{(m-1)^2}{(m-2)} r^0 \left[\dfrac{A_{33}}{x_3^0}(a_1x_2^0-a_2x_1^0)+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}(a_3x_1^0-a_1x_3^0)\right]; \\
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3\,\partial x_1}\right)_0 = \\
(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{31} - \dfrac{(m-1)^2}{(m-2)} r^0 \left[\dfrac{A_{33}}{x_3^0}(a_2x_3^0-a_3x_2^0)+\dfrac{A_{11}}{x_1^0}(a_1x_2^0-a_2x_1^0)\right]; \\
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_0 = \\
(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{12} - \dfrac{(m-1)^2}{(m-2)} r^0 \left[\dfrac{A_{11}}{x_1^0}(a_3x_1^0-a_1x_3^0)+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}(a_2x_3^0-a_3x_2^0)\right].
\end{cases}
$$

Considérons maintenant l'équation du plan tangent au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0); cette équation est

$$(R)\qquad g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3 = 0.$$

L'équation des plans tangents au cône F ou (30.) suivant cette même arête est

$$x_1^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_0+\cdots+2x_2x_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)_0+\cdots = 0,$$

ou d'après les valeurs (104.) et (104bis.)

$$
(T)\quad
\begin{cases}
\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_1x_1^2+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_2x_2^2+\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_3x_3^2+\left(\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_3+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_2\right)x_2x_3 \\
\quad+\left(\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_1+\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_3\right)x_1x_3+\left(\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_2+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_1\right)x_1x_2 \\
\quad-\dfrac{(m-2)}{2r^0(m-1)^2}(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\,\mathrm{S}\,x_ix_j\left(\overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{ij}\right) = 0,
\end{cases}
$$

en posant

$$
(105.)\quad
\begin{cases}
\gamma_1 = a_2x_3^0-a_3x_2^0, \\
\gamma_2 = a_3x_1^0-a_1x_3^0, \\
\gamma_3 = a_1x_2^0-a_2x_1^0.
\end{cases}
$$

Or si l'on suppose la droite (29.) parallèle au plan (R), un des plans tangents (T) au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) se confondra avec le plan (R).

En effet, la droite de direction (a_1, a_2, a_3) devant être parallèle au plan (R), on aura

$$(106.)\qquad a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3 = 0;$$

on a en outre, d'après (48.),

$$x_1'' g_1 + x_2'' g_2 + x_3'' g_3 = 0.$$

D'où l'on conclut, en éliminant alternativement les g_i:

$$(107.)\qquad \frac{\gamma_1}{g_1} = \frac{\gamma_2}{g_2} = \frac{\gamma_3}{g_3}.$$

Eu égard aux relations (106.) et (107.), l'équation des plans T devient:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{11}}{x_1^0} g_1 x_1^2 + \frac{A_{22}}{x_2^0} g_2 x_2^2 + \frac{A_{33}}{x_3^0} g_3 x_3^2 + \left(\frac{A_{22}}{x_2^0} g_3 + \frac{A_{33}}{x_3^0} g_2\right) x_2 x_3 \\ + \left(\frac{A_{33}}{x_3^0} g_1 + \frac{A_{11}}{x_1^0} g_3\right) x_1 x_3 + \left(\frac{A_{11}}{x_1^0} g_2 + \frac{A_{22}}{x_2^0} g_1\right) x_1 x_2 \end{array}\right\} = 0;$$

équation qui peut s'écrire

$$(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3)\left(\frac{A_{11}}{x_1^0} x_1 + \frac{A_{22}}{x_2^0} x_2 + \frac{A_{33}}{x_3^0} x_3\right) = 0.$$

Donc un des plans tangents au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ se confond avec le plan tangent de rebroussement au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1'', x_2'', x_3''). Par conséquent, pour une droite quelconque parallèle au plan de rebroussement (R), ces deux cônes ont en commun au moins *cinq* arêtes coincidant avec l'arête double (x_1'', x_2'', x_3''). De là nous concluons que:

Une droite quelconque parallèle au plan tangent de rebroussement rencontre la surface asymptote au moins en un point à l'infini, si l'on fait abstraction des quatre points situés sur le plan à l'infini qui appartient à la surface.

Donc, lorsque le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m possède une arête double, les droites parallèles au plan tangent de rebroussement sont des directions asymptotiques de la surface asymptote; cette surface doit, par suite, contenir à l'infini une double droite dans un plan parallèle au plan tangent de rebroussement.

Résumé.

43. Donc, en définitive, les directions asymptotiques de la surface asymptote sont

1°. Les génératrices du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou $\varphi_m(x, y, z)$;

2°. Des droites quelconques parallèles aux plans tangents d'inflexion du cône φ_m;

3°. Des droites quelconques parallèles aux plans tangents suivant les arêtes doubles, lorsque le cône φ_m possède de telles arêtes.

---

§. IV.

Détermination des termes de degré N et $(N-1)$ dans l'équation de la surface asymptote.

Nous reprendrons, dans ce dernier paragraphe, les notations que nous avions adoptées dans la première partie.

I°. Recherche des termes de degré N et $(N-1)$.

44. Pour déterminer la forme des termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote, nous nous placerons dans le cas le plus général; c. à. d. que nous supposerons que la surface U n'a pas de points doubles à l'infini; de plus, nous admettrons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ n'a pas d'arêtes doubles, et que les génératrices (ϑ) correspondant à ses arêtes d'inflexion sont toutes à l'infini.

Nous savons que le degré de la développable asymptote est, dans le cas général,

$$(1.) \qquad N = m(3m-5).$$

Or nous connaissons les directions asymptotiques, qui sont d'abord les génératrices du cône φ_m des directions asymptotiques; par conséquent, les termes du degré le plus élevé en x, y, z, dans l'équation de la surface asymptote doivent contenir comme facteur la fonction $\varphi_m(x, y, z)$.

Nous savons, en second lieu, qu'il y a sur la surface asymptote $3m(m-2)$ droites à l'infini, lesquelles sont les intersections du plan à l'infini avec les $3m(m-2)$ plans asymptotes respectivement parallèles aux plans d'inflexion du cône des directions asymptotiques [n°s. 34 et 35]. Ainsi, la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

étant une arête d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$, la surface asymptote contiendra la droite à l'infini

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c}+t\varphi_{m-1}(a, b, c) = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, les termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote contiendront [n°. 10, 1ère partie] en facteur la fonction linéaire

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c} = 0;$$

et ainsi des autres.

Donc, en désignant par $\theta(x,y,z)$ le produit des premiers membres des équations des $3m(m-2)$ plans d'inflexion du cône $\varphi_m(x,y,z)$, les termes du degré le plus élevé, dans l'équation de la surface asymptote, devront contenir en facteur l'expression

$$\varphi_m(x,y,z).\theta(x,y,z);$$

mais cette expression est du degré $[m+3m(m-2)]$ ou N, elle constitue donc l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote.

Ainsi, en désignant par (a_i, b_i, c_i) les solutions des deux équations

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi_m(a,b,c) = 0, \\ H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial a\partial b} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial a\partial c} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial b\partial a} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial b^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial b\partial c} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial c\partial a} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial c\partial b} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial c^2} \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

puis, posant

$$(3.)\quad A_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i},\qquad B_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i},\qquad C_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i},$$

l'expression $\theta(x,y,z)$ sera définie par l'égalité

$$(4.)\quad \begin{cases} \theta(x,y,z) = (A_1x+B_1y+C_1z)(A_2x+B_2y+C_2z)\dots(A_px+B_py+C_pz), \\ \text{où}\qquad p = 3m(m-2). \end{cases}$$

La fonction $\theta(x,y,z)$ pourra s'obtenir en éliminant a, b, c entre les deux équations (2.) et la suivante

$$(5.)\quad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c} = 0.$$

L'équation de la surface asymptote Δ sera donc de la forme

$$(6.)\ (\Delta)\quad \varphi(x,y,z)+t\psi(x,y,z)+t^2\chi(x,y,z)+\dots = 0,$$

en posant

$$(7.)\quad \varphi(x,y,z) = \varphi_m(x,y,z).\theta(x,y,z);$$

la fonction $\varphi(x,y,z)$ est homogène et du degré N.

45. Les directions asymptotiques de la surface Δ sont, outre les génératrices du cône $\varphi_m(x,y,z)$, des droites quelconques parallèles aux différents plans tangents d'inflexion du cône φ_m; et, en outre, il résulte de la conclusion du n°. 35 que, si l'on considère une droite quelconque parallèle

au plan tangent d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1} = 0,$$

le plan asymptote de la surface Δ sera, quelle que soit la direction de la droite, le plan asymptote de la surface U correspondant à la direction asymptotique (a_1, b_1, c_1), savoir

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}+t\varphi_{m-1}(a_1, b_1, c_1) = 0.$$

Cette remarque va nous servir pour déterminer la forme de la fonction $\psi(x, y, z)$.

46. Soit d'abord (α, β, γ) une direction asymptotique du cône $\varphi_m(x, y, z)$, c. à. d. que

$$(8.)\quad \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cette droite est aussi une direction asymptotique de la surface Δ, et le plan touchant la surface Δ au point à l'infini sur (α, β, γ), ou le plan asymptote de Δ, n'est autre que le plan asymptote de la surface U correspondant à la direction (α, β, γ), c. à. d.

$$(9.)\quad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Exprimons que le plan asymptote de la surface Δ (6.) et correspondant à (α, β, γ), savoir

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}+t\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

coincide avec le plan (9.), quelles que soient les valeurs de α, β, γ, satisfaisant à la relation (8.).

Or, d'après la définition (7.) de φ

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \theta(x, y, z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\varphi_m(x, y, z)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \theta(x, y, z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y}+\varphi_m(x, y, z)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \theta(x, y, z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial z}+\varphi_m(x, y, z)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}; \end{cases}$$

d'où l'on conclut, eu égard à la relation (8.):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \theta(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \theta(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \theta(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}.$$

Le plan asymptote de la surface Δ, correspondant à (α, β, γ), a donc pour équation:

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{\theta(\alpha, \beta, \gamma)} = 0.$$

Ce plan doit coincider avec le plan (9.), c. à. d. que, pour toutes les valeurs de α, β, γ qui vérifient la relation (8.), on doit avoir

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma)=\theta(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma).$$

En d'autres termes, si nous considérons les deux cônes

$$\begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = 0, \\ \psi(x,y,z)-\theta(x,y,z).\varphi_{m-1}(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

toutes les arêtes du 1er cône doivent être situées sur le second; ce qui exige qu'on ait l'identité

$$(11.)\qquad \psi(x,y,z) = \theta(x,y,z)\varphi_{m-1}(x,y,z)+\varphi_m(x,y,z)\,V(x,y,z),$$

$V(x,y,z)$ étant une fonction indéterminée homogène et du degré $[3m(m-2)-1]$.

47. Pour déterminer la fonction $V(x,y,z)$, nous nous appuierons sur la remarque du n°. 45, c. à. d. que nous exprimerons que, pour une direction asymptotique quelconque parallèle au plan d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}=0, \quad \text{ou} \quad A_1x+B_1y+C_1z=0,$$

le plan asymptote correspondant de la surface $\varDelta$ se confond, quelle que soit l'orientation de la droite considérée, avec le plan

$$(P_1)\qquad \begin{cases} x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}+t\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1) = 0, \\ \text{ou} \quad A_1x+B_1y+C_1z+t\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1) = 0; \end{cases}$$

et cela pour les $3m(m-2)$ solutions (a_1,b_1,c_1) des équations (12.). Comme nous l'avons dit, cette propriété résulte des calculs du n°. 35 où l'on a démontré que le plan (P_1) est tangent à la surface asymptote tout le long de la droite à l'infini

$$A_1x+B_1y+C_1z=0,\quad t=0.$$

Soit alors une direction asymptotique (α,β,γ) parallèle au plan

$$A_1x+B_1y+C_1z = 0,$$

de sorte qu'on a la relation

$$(12.)\qquad A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma = 0.$$

Nous représenterons par $\theta_1(x,y,z)$ le produit de tous les facteurs $(A_1x+B_1y+C_1z)$. $(A_2x+B_2y+C_2z)$, ... à l'exception du facteur $(A_1x+B_1y+C_1z)$, c. à. d. que nous poserons

$$(13.)\qquad \begin{cases} \theta_1(x,y,z) = \dfrac{\theta(x,y,z)}{A_1x+B_1y+C_1z}, \\ \text{ou}\ \ \theta(x,y,z) = (A_1x+B_1y+C_1z)\theta_1(x,y,z). \end{cases}$$

D'après cette notation, nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A_i\theta_i(x,y,z)\varphi_m(x,y,z)+(A_ix+B_iy+C_iz)\Big[\varphi_m\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\Big];$$

etc. etc.

d'où nous conclurons, en ayant égard à la relation (12.):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = A_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = B_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = C_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \end{cases}$$

et, d'après l'identité (11.):

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma).V(\alpha,\beta,\gamma).$$

Le plan asymptote de la surface Δ a donc pour équation

$$A_ix+B_iy+C_iz+t\frac{V(\alpha,\beta,\gamma)}{\theta_i(\alpha,\beta,\gamma)} = 0.$$

Pour que ce plan coincide avec le plan (P_i), il faut qu'on ait

$$(14.)\qquad V(\alpha,\beta,\gamma) = \theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i);$$

cette égalité doit avoir lieu pour toutes les valeurs de α, β, γ qui satisfont à la relation unique

$$(12.)\qquad \alpha A_i+\beta B_i+\gamma C_i = 0;$$

et elle doit avoir lieu aussi pour toutes les $3m(m-2)$ solutions (a_i, b_i, c_i).

Or, nous écrivons la fonction $V(x,y,z)$ sous la forme suivante

$$(15.)\quad \begin{cases} V(x,y,z) = \\ K_1.\theta_1(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1)+K_2.\theta_2(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_2,b_2,c_2)+\cdots \\ \cdots+K_i.\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)+\cdots+K_p.\theta_p(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_p,b_p,c_p) \\ +T(x,y,z), \end{cases}$$

les K_i étant des constantes arbitraires; les θ_i étant définies par les égalités (13.); les (a_i,b_i,c_i) ayant la signification déjà plusieurs fois indiquée; $T(x,y,z)$ étant une fonction du même degré que V c. à. d. du degré $(p-1)$ (p étant égal à $3m(m-2)$) et jouissant de la propriété de s'annuler pour toutes les valeurs possibles de α, β, γ, qui satisfont à une quelconque des relations (12.).

Pour une solution quelconque de la relation (12.), les fonctions θ_1, θ_2, ... θ_{i-1}, θ_{i+1}, ... θ_p, qui contiennent $(A_ix+B_iy+C_iz)$ en facteur.

s'annulent lorsqu'on y fait $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; et, comme, par hypothèse. $T(\alpha, \beta, \gamma)$ est aussi nulle, la fonction V ou (15.) se réduit à

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = K_i . \theta_i(\alpha, \beta, \gamma) . \varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i);$$

la relation (14.) et toutes les conditions imposées seront alors vérifiées en supposant les constantes K_i égales à l'unité. Quant à la fonction $T(x, y, z)$, elle est identiquement nulle; car les conditions imposées à cette fonction reviennent à dire que le cône $T(x, y, z) = 0$ doit passer par toutes les droites situées dans un quelconque des plans

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0,\ \ldots\ A_p x + B_p y + C_p z = 0;$$

ce qui exige que la fonction $T(x, y, z)$ contienne comme facteurs toutes les fonctions linéaires $(A_i x + B_i y + C_i z)$ dont le nombre est $3m(m-2)$; or la fonction $T(x, y, z)$ est du degré $[3m(m-2)-1]$; donc elle est identiquement nulle.

On pourrait aussi déterminer la fonction V en cherchant à vérifier successivement les relations fournies par les égalités (14.) et (12.) dans lesquelles on ferait $i = 1, 2, 3, \ldots p$; on retrouverait ainsi la forme (15.); c'est donc la forme la plus générale satisfaisant aux conditions imposées.

48. *L'équation de la développable asymptote* étant mise sous la forme

$$(16.)\qquad \varphi(x, y, z) + t\psi(x, y, z) + t^2\chi(x, y, z) + \cdots = 0,$$

les fonctions φ et ψ sont donc connues; et l'on a

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) = \varphi_m(x, y, z) . \theta(x, y, z), \\ \psi(x, y, z) = \varphi_{m-1}(x, y, z) . \theta(x, y, z) + \varphi_m(x, y, z) \Big[\sum_{i=1}^{i=p} \theta_i(x, y, z) . \varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i) \Big]; \end{cases}$$

dans ces expressions, (a_i, b_i, c_i) désigne une solution quelconque des équations (2.); le nombre p est égal à $3m(m-2)$; et enfin, on a posé

$$(18.)\quad \begin{cases} \theta(x, y, z) = \left(x\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial a_1} + y\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial b_1} + z\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial c_1} \right) \left(x\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial a_2} + y\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial b_2} + z\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial c_2} \right) \cdots; \\ \theta_i(x, y, z) = \dfrac{\theta(x, y, z)}{x\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial a_i} + y\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial b_i} + z\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial c_i}}. \end{cases}$$

49. Nous allons reprendre sur cette équation définitive l'étude des points à l'infini de la surface asymptote; nous rappellerons ainsi, en les confirmant, les propriétés déjà établies directement.

Ecrivons d'abord les dérivées partielles des fonctions φ et ψ:

$$(19.)\quad \begin{cases} \varphi(x,y,z) = \varphi_m(x,y,z).\theta(x,y,z) = \\ \varphi_m(x,y,z).\theta_1(x,y,z)\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right); \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}\theta+\varphi_m\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\right], \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y}\theta+\varphi_m\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}\right], \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial z}\theta+\varphi_m\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial z}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right], \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\theta+2\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\right] \\ +\varphi_m\left[2\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}\right] \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial x\partial y}\theta+\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}\right] \\ +\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y}\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\right] \\ +\varphi_m\left[\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial y}\right] \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(22.)\quad \psi(x,y,z) = \varphi_{m-1}(x,y,z)\theta(x,y,z)+\varphi_m(x,y,z)\left[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]$$

$$(23.)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \begin{cases} \theta\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}+\varphi_{m-1}\left[\left(x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\theta_1\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}\right] \\ +\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] \\ +\varphi_m\left[\sum_{i=1}^{i=p}\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\dfrac{\partial\theta_i}{\partial x}\right] \end{cases}$$

. . . .

1°. **Soit une direction asymptotique appartenant au cône $\varphi_m(x,y,z)$.**

Si (α,β,γ) est la direction considérée, on devra avoir

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

d'après cette relation et les formules (19.), (20.) et (22.) nous trouverons

pour l'équation du plan asymptote correspondant de la développable Δ:

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

ce plan coincide avec le plan asymptote de la surface U relatif à la même direction asymptotique.

II°. Soit une direction asymptotique (a_1, b_1, c_1) parallèle à une arête d'inflexion du cône $\varphi_m(x,y,z)$.

Dans cette hypothèse, on a

$$(24.)\quad \begin{cases} \varphi_m(a_1,b_1,c_1)=0, \quad \text{ou} \quad a_1\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+b_1\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+c_1\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}=0; \\ \theta(a_1,b_1,c_1)=0, \quad \theta_1(a_1,b_1,c_1)\gtrless 0. \end{cases}$$

Les équations (20.) donnent alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b_1}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c_1}=0; \quad \psi(a_1,b_1,c_1)=0;$$

c. à. d. que le point à l'infini $\left(\frac{x}{a_1}=\frac{y}{b_1}=\frac{z}{c_1},\, t=0\right)$ est un point double pour la surface asymptote.

L'équation du *cylindre asymptote* correspondant est (§. II, 1ère partie)

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma}\\ &+2t\left(x\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right)+2t^2\chi(\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}\right\}=0.$$

Si, dans cette équation, on remplace α, β, γ par a_1, b_1, c_1, et qu'on calcule les coefficients à l'aide des formules (21.) et (23.) en tenant compte des relations (24.), on trouve

$$(26.)\quad \left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}+t\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1)\right]^2+t^2\left[\frac{\chi(a_1,b_1,c_1)}{\theta_1(a_1,b_1,c_1)}-(\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1))^2\right] = 0;$$

le cylindre asymptote se compose de deux plans parallèles. Le point double est donc un point de rebroussement conique dont l'axe de rebroussement est la droite à l'infini

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}+t\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1)=0, \qquad t=0.$$

Ainsi *la surface asymptote Δ possède déjà* $3m(m-2)$ *points doubles à l'infini, lesquels sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini parallèle à la génératrice d'inflexion correspondante.*

III°. Soit une direction asymptotique (α,β,γ) parallèle à l'un des plans d'inflexion.

Supposons la droite (α,β,γ) parallèle au plan

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0;$$

on aura donc les relations

$$(27.)\quad\begin{cases}\alpha\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0;\\ \text{d'où}\\ \theta(\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad\text{et}\quad \theta_i(\alpha,\beta,\gamma)\gtrless 0.\end{cases}$$

On trouve pour le plan asymptote de la surface $\varDelta$

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)=0,$$

et cela, quelle que soit la direction (α,β,γ) parallèle au plan considéré. Ainsi

La surface asymptote possède à l'infini $3m(m-2)$ droites; pour chacune d'elles, le plan tangent en un point quelconque reste fixe et coïncide avec le plan asymptote de la surface U correspondant à l'arête d'inflexion à laquelle est parallèle la droite à l'infini considérée.

IV°. Soit une direction asymptotique (α,β,γ) parallèle à une des intersections du cône $\varphi_m(x,y,z)$ avec ses plans d'inflexion.

Chaque plan d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0,$$

par exemple, coupe le cône $\varphi_m(x,y,z)$ suivant m droites, dont trois coïncident avec l'arête d'inflexion (a_i,b_i,c_i); il en reste $(m-3)$ autres qui donnent autant de points à l'infini dont nous allons étudier les propriétés.

Soit (α,β,γ) une de ces intersections; on aura alors

$$(28.)\quad\begin{cases}\alpha\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0,\quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,\\ \text{d'où}\\ \theta(\alpha,\beta,\gamma)=0;\quad \theta_i(\alpha,\beta,\gamma)\gtrless 0.\end{cases}$$

Les équations (20.) et (22.) donnent d'abord

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=0;\quad \psi(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

donc ces points à l'infini sont des *points doubles.*

En tenant compte des relations (28.), on trouvera pour l'équation du cylindre asymptote

$$(29.)\quad \begin{cases} \left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] \\ \qquad +t^2\left[\frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\theta_i(\alpha,\beta,\gamma)}-\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] = 0; \end{cases}$$

c'est un cylindre proprement dit dont les plans asymptotes sont, l'un le plan asymptote de la surface U correspondant à la génératrice d'inflexion (a_i, b_i, c_i), et l'autre le plan asymptote de la surface U correspondant à l'arête (α, β, γ) située dans le plan d'inflexion.

Ainsi, sur chacune des $3m(m-2)$ droites que la surface asymptote possède à l'infini, il y a $(m-2)$ points doubles, dont un est un point de rebroussement conique pour lequel l'axe est à l'infini. Par conséquent, la surface asymptote possède déjà

$$3m(m-2)^2$$

points doubles à l'infini, parmi lesquels il y a $3m(m-2)$ points de rebroussement.

V°. Soit une direction asymptotique (α, β, γ) parallèle à l'une des intersections des plans tangents d'inflexion entre eux.

Soit (α, β, γ) une de ces intersections; on aura, par exemple:

$$(30.)\quad \begin{cases} \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0, \\ \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_j}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_j}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_j} = 0. \end{cases}$$

Les équations (20.) et (22.) donnent

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=0;\quad \psi(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

donc les points à l'infini correspondants sont des *points doubles*.

En tenant compte des relations (30.), on trouvera pour l'équation du cylindre asymptote

$$(31.)\quad \begin{cases} \left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_j}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_j}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_j}+t\varphi_{m-1}(a_j,b_j,c_j)\right] \\ \qquad +t^2\left[\frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma}{\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)}-\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\varphi_{m-1}(a_j,b_j,c_j)\right] = 0: \end{cases}$$

c'est un cylindre proprement dit dont les plans asymptotes sont les plans asymptotes de la surface U correspondant aux arêtes d'inflexion (a_i, b_i, c_i), (a_j, b_j, c_j).

Or, le nombre des plans d'inflexion étant $3m(m-2)$, le nombre de leurs intersections c. à. d. le nombre des droites actuelles (α, β, γ) sera

$$\frac{3m(m-2)}{2}[3m(m-2)-1];$$

ce qui donne autant de nouveaux points doubles.

Theorème. *Donc, en définitive, la surface asymptote possède, en tout,*

$$\frac{3m(m-2)[3m(m-2)-1]}{2}+3m(m-2)^2 = \frac{3m(m-2)}{2}[3m^2-4m-5]$$

points doubles, parmi lesquels il y a $3m(m-2)$ points de rebroussement. Sur chacune des $3m(m-2)$ droites que la surface asymptote possède à l'infini, il y a

$$\left(\frac{3m^2-4m-5}{2}\right)$$

points doubles, dont un est un point de rebroussement.

50. Nous signalerons encore la propriété suivante:

La surface proposée U étant de degré m, la surface asymptote est, en général, du degré $m(3m-5)$; ces deux surfaces se coupent donc suivant une courbe gauche de l'ordre $m^2(3m-5)$.

Or

$$(1^\circ.)\quad U=\varphi_m+t\varphi_{m-1}+t^2\varphi_{m-2}+\cdots=0,$$

$$(2^\circ.)\quad \Delta=\varphi_m\theta+t\Big[\varphi_{m-1}\theta+\varphi_m\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\Big]+t^2\chi+\cdots=0.$$

Retranchons de la seconde équation la 1ère multipliée par θ, et divisons par t, il vient

$$(3^\circ.)\quad \Delta'=\varphi_m\Big[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\Big]+t[\chi-\varphi_{m-2}.\theta]+t^2\ldots=0.$$

Retranchons encore de cette dernière équation la 1ère multipliée par $\sum_1^p\theta_i\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)$, on trouve, après avoir divisé par t,

$$(4^\circ.)\quad \Delta''=\chi-\theta\varphi_{m-2}-\varphi_{m-1}.\sum_1^p\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)+t(\cdots)+t^2(\cdots)+\cdots=0.$$

Or la surface Δ'' est du degré $[m(3m-5)-2]$ ou $(m-2)(3m+1)$; donc

La courbe d'intersection de la surface U et de la développable asymptote, laquelle courbe est de l'ordre $m^2(3m-5)$, se trouve sur une surface de l'ordre $(m-2)(3m+1)$.

51. **Remarque.**

Tous les calculs et conséquences développés depuis le n°. 44 jusqu'au n°. 51 ont été établis dans l'hypothèse où le cône $\varphi_m(x,y,z)$ n'a pas d'arêtes doubles.

Supposons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ ait une arête double ordinaire.

Nous savons que, dans ce cas, l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de deux unités [n°. 29], il est, par suite, égal à

$$[m(3m-5)-2].$$

Les directions asymptotiques sont alors: 1°. les génératrices du cône φ_m: 2°. les droites parallèles aux plans d'inflexion restants; 3°. les droites parallèles aux plans touchant le cône φ_m suivant l'arête double en question [n°. 39].

Mais la présence d'une arête double diminue de *six* unités le nombre des arêtes d'inflexion; par conséquent, la fonction $\theta'(x, y, z)$ correspondant aux plans d'inflexion restants sera ici du degré $[3m(m-2)-6]$, la fonction

$$\varphi_m(x, y, z).\theta'(x, y, z)$$

est donc du degré $[m+3m(m-2)-6]$ ou $[m(3m-5)-6]$; par suite, les premiers membres des équations des plans tangents P et Q suivant l'arête double devront entrer respectivement au second degré. De sorte que l'ensemble des termes du degré le plus élevé pour la surface asymptote sera, dans le cas actuel,

$$\varphi_m(x, y, z).\theta'(x, y, z).P^2.Q^2.$$

Supposons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ ait une arête de rebroussement.

Nous savons que, dans ce cas, l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de *quatre* unités [n°. 30], il est, par suite, égal à

$$[m(3m-5)-4].$$

Les directions asymptotiques sont alors: 1°. les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$; 2°. les droites parallèles aux plans d'inflexion restants; 3°. les droites parallèles au plan touchant le cône φ_m suivant l'arête de rebroussement [n°. 42].

Mais la présence d'une arête de rebroussement diminue de *huit* unités le nombre des arêtes d'inflexion, par conséquent la fonction $\theta''(x, y, z)$ correspondant aux plans d'inflexion restants sera ici du degré $[3m(m-2)-8]$: la fonction

$$\varphi_m(x, y, z).\theta''(x, y, z)$$

est donc du degré $[m+3m(m-2)-8]$ ou $[m(3m-5)-8]$; par suite, le premier membre R de l'équation du plan de rebroussement doit entrer au 4ème degré. De sorte que l'ensemble des termes du degré le plus élevé pour la surface asymptote sera, dans le cas actuel,

$$\varphi_m(x, y, z).\theta''(x, y, z).R^4.$$

II°. Cas où le cône des directions asymptotiques est décomposable.

52. Lorsque le cône des directions asymptotiques de la surface U se décompose en plusieurs cônes de degrés moindres que m, on peut déterminer isolément la surface développable asymptote correspondant à chacun de ces cônes; l'ensemble de ces surfaces partielles constituera la ***surface asymptote complète*** pour la surface proposée.

Evaluons le degré de ces surfaces asymptotes partielles.

Reprenons la notation x_1, x_2, x_3, pour les variables, et représentons respectivement par $u(x_1, x_2, x_3)$ et $v(x_1, x_2, x_3)$ les fonctions homogènes $\varphi_m(x, y, z)$ et $\varphi_{m-1}(x, y, z)$.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$(32.)\qquad \varphi_m \text{ ou } u(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2, x_3).Q(x_1, x_2, x_3),$$

les fonctions P et Q étant respectivement des degrés p et q, de sorte que

$$(33.)\qquad p+q = m.$$

L'équation du plan asymptote correspondant à une génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0) du cône $P(x_1, x_2, x_3)$ sera

$$(34.)\qquad x_1 P_1^0 + x_2 P_2^0 + x_3 P_3^0 + t f^0 = 0,$$

avec la condition

$$(34^{\text{bis}}.)\qquad P(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = P^0 = 0;$$

nous avons, en outre, posé

$$(35.)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{v(x_1, x_2, x_3)}{Q(x_1, x_2, x_3)}.$$

Les raisonnements et les calculs du n°. 8 sont applicables ici. De sorte que si l'on pose

$$(36.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_{rs} = \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial P_{rs}}; \\ G_r = f_1 \mathfrak{H}_{r1} + f_2 \mathfrak{H}_{r2} + f_3 \mathfrak{H}_{r3}, \end{cases}$$

on trouve que le nombre des génératrices de la surface asymptote (correspondant au cône $P(x_1, x_2, x_3)$) rencontrées par une droite arbitraire est égal au nombre des solutions communes ou des génératrices communes aux deux cônes

$$(37.)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 \mathfrak{H} \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 \mathfrak{H} \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 \mathfrak{H} \end{vmatrix} = 0, \quad P(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Or, si l'on remarque que

$$f_i = \frac{Qv_i - vQ_i}{Q^2},$$

la première des équations (37.) pourra s'écrire

$$(38.)\qquad \mathfrak{H}.Q^2\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & A_1 \\ a_2 & x_2 & A_2 \\ a_3 & x_3 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & L_1 \\ a_2 & x_2 & L_2 \\ a_3 & x_3 & L_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(39.)\qquad \begin{cases} L_r = A_1\mathfrak{H}_{r1} + A_2\mathfrak{H}_{r2} + A_3\mathfrak{H}_{r3}, \\ A_r = Qv_r - vQ_r. \end{cases}$$

Mais les fonctions P, Q, $\mathfrak{H}$, sont des degrés respectifs

$$p,\quad (m-p),\quad 3(p-2);$$

on voit d'après cela, et en ayant égard à (33.), que l'équation (38.) est du degré

$$(p+2m-5).$$

Donc le degré de la surface asymptote partielle correspondant au cône $P(x_1, x_2, x_3)$ des directions asymptotiques est égal à

$$N_1 = p(p+2m-5),$$

p étant le degré du cône $P(x_1, x_2, x_3)$.

Le degré de la surface asymptote partielle correspondant aux directions asymptotiques du cône $Q(x_1, x_2, x_3)$ sera

$$N_2 = q(q+2m-5),$$

q étant le degré du cône $Q(x_1, x_2, x_3)$.

L'ensemble de ces deux surfaces constitue la développable asymptote complète de la surface proposée; or cet ensemble de surfaces sera, eu égard à la relation (33.), du degré

$$N = N_1 + N_2 = m(3m-5) - 2pq.$$

53. Il est facile de généraliser ces considérations, et de voir que, si

$$\varphi_m(x, y, z) = P(x, y, z).Q(x, y, z).R(x, y, z).S(x, y, z)\ldots = 0$$

est l'équation du cône des directions asymptotiques, si p, q, r, s ... sont les degrés respectifs des fonctions P, Q, R, S, ... l'ensemble des surfaces asymptotes partielles formera un système du degré

$$N = m(3m-5) - 2(pq + pr + ps + \cdots + qr + \cdots).$$

Donc, *lorsque le cône des directions asymptotiques se décompose en plusieurs cônes, les surfaces asymptotes partielles correspondant aux différents cônes forment un système de surfaces dont le degré est moindre que le degré de la surface asymptote correspondant au cas général où le cône $\varphi_m(x, y, z)$ est indécomposable; la diminution du degré est égale au double du nombre des intersections des cônes partiels pris deux à deux.*

Ce résultat est parfaitement d'accord avec la conclusion énoncée au n°. 31.

Je ne m'arrêterai pas à l'examen des cas particuliers qui se présentent dans la question actuelle; et je terminerai en résumant les différentes propriétés de la surface asymptote qui nous ont été fournies par l'analyse développée dans cette 2ème partie.

III°. Résumé général.

54. La surface développable asymptote est l'enveloppe des plans asymptotes de la surface proposée U; elle est, en général, de *l'ordre*

$$N = m(3m-5),$$

si m est l'ordre de la surface U; et de la *classe* $m(m-1)$.

Lorsque le cône $\varphi_m(x, y, z)$ des directions asymptotiques possède une arête double ordinaire ou une arête de rebroussement (ne correspondant pas à un point double de la surface U) l'ordre de la surface asymptote est diminué de *deux* ou de *quatre* unités.

Lorsque la surface U a un point double à l'infini, l'ordre de la surface asymptote est, en général, diminué de *six* unités; mais, si la direction asymptotique correspondant au point double est une arête triple du cône $\varphi_m(x, y, z)$, la diminution sera de *neuf* ou de *douze* unités, suivant que cette droite est une arête simple ou une arête double du cône $\varphi_{m-1}(x, y, z)$.

Les directions asymptotiques de la surface asymptote sont: d'abord, les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$; en second lieu, des droites quelconques parallèles aux plans d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$, et aux plans touchant le cône suivant des arêtes doubles, lorsqu'il y a de telles arêtes.

On peut conclure de là l'expression des termes de degré N et $(N-1)$ de l'équation de la surface asymptote.

La surface asymptote possède, en général, à l'infini $3m(m-2)$ droites; le plan tangent reste invariable quel que soit le point considéré sur une de ces droites. Sur chacune de ces droites, il y a

$$\frac{3m^2-4m-5}{2}$$

points doubles pour la surface asymptote, dont un est un point de rebroussement de conique pour lequel l'axe est à l'infini. La surface asymptote possède, en tout,

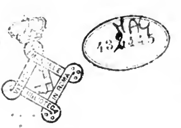
$$\frac{3m(m-2)}{2}[3m^2-4m-5]$$

points doubles, dont $3m(m-2)$ sont des points de rebroussement correspondant aux arêtes d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$.

La courbe d'intersection de la surface proposée avec la surface asymptote, courbe dont l'ordre est $m^2(3m-5)$, se trouve sur une surface d'ordre $(m-2)(3m+1)$.

Lorsque le cône des directions asymptotiques se décompose en plusieurs cônes, les surfaces asymptotes partielles correspondant aux différents cônes forment un système de surfaces dont le degré est moindre que le degré de la surface asymptote correspondant au cas général où le cône est indécomposable; la diminution du degré est égale au double du nombre des intersections des cônes partiels pris deux à deux.

Lorsque l'équation de la surface proposée peut être amenée à ne plus renfermer de termes du degré $(m-1)$, la surface asymptote est le cône $\varphi_m(x, y, z)$ des directions asymptotiques; et réciproquement, lorsque tous les plans asymptotes enveloppent un cône, l'équation de la surface peut être amenée à ne plus renfermer de termes du degré $(m-1)$.



(Imprimé chez George Reimer à Berlin.)

